第 35卷 第 5期
1996年 9月

中山大学学报 (自然科学版)
ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM UNIVERSITATIS SUNYATSENI

Vol. 35 No. 5
Sep. 1996

Lipschitz曲线上函数空间的 B-小波刻画*

李彤彤 邓东皋
(中山大学 数学系 ,广 州 510275)

摘 要 利用 Tchamitchian的 B-小波 ,给出了 Lipschitz曲线上相应的 Besov空间及 Triebel-Lizorkin空间的小波刻画 .

关键词 Lipschitz曲线 , Besov 空间 , Triebel-Lizorkin空间 , B-小波
分类号 O 174. 3

在 $\mathbf{R}^n$ 上 , Besov 空间及 Triebel-Lizorkin空间提供了一个对函数空间进行统一处理的框架.许多经典函数空间 ,都是 Besov空间或 Triebel-Lizorkin空间的特殊情形或与之有密切的关系.为了深入研究 Lipschitz曲线上的函数空间理论及 Lipschitz区域上的椭圆边值问题,给出 Lipschitz曲线上的 Besov 空间及 Triebel-Lizorkin空间的定义是关键的一步.

设 $A: \mathbf{R}\to\mathbf{R}$是一个实值的 Lipschitz函数,即满足$|A(x)-A(y)|\leqslant M|x-y|$. Γ是由 $Z=x+iA(x)$给出的复平面 $\mathbf{C}$上的 Lipschitz曲线.

邓东皋和韩永生以 Calderón-Zygmund算子理论为工具,从 Lipschitz曲线上的 Calderón表示定理出发,引入了“(U,V)型光滑分子”的概念,并在此基础上给出了 Lipschitz曲线上的 Besov空间 $\dot{B}_p^{\alpha,q}(\Gamma)$ ($|\alpha|<1$, $1\leqslant p,q\leqslant\infty$)及 Triebel-Lizorkin空间 $\dot{F}_p^{\alpha,q}(\Gamma)$ ($|\alpha|<1$, $1<p,q<\infty$)的定义及基本性质[1,2].

另一方面,在 $\mathbf{R}^n$ 上,小波分析是研究函数空间的有力工具[3].在 Lipschitz曲线上, Tchamitchian于 1989年证明了有正交小波存在,这就是所谓的 B-小波[4,5].

设 V_j是 $L^2(R)$上的 r正则多尺度分析,令 $b(x)=1+iA'(x)$,则存在 $\gamma>0$及一族函数 ψ_{jk}, $j,k\in\mathbf{Z}$,满足:

① $\psi_{jk}\in V_{j+1}$, $\forall j,k\in\mathbf{Z}$;

② $|\partial^\alpha\psi_{jk}(x)|\leqslant C2^{j(|\alpha|+\frac{1}{2})}\exp(-\gamma|2^jx-k|)$, $|\alpha|\leqslant r$;

③ $\int_R\psi_{jk}(x)\psi_{j'k'}(x)b(x)\,\mathrm{d}x=\delta_{jj'}\delta_{kk'}$;

④ $\{\psi_{jk}\}_{(j,k)\in(\mathbf{Z}\times\mathbf{Z})}$构成 $L^2(\mathbf{R})$的 Riesz基 $\{\psi_{jk}\}$. $\{\psi_{jk}\}_{(j,k)\in\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}}$即称为 B-小波基.

令 $\Psi_{jk}(Z)=\psi_{jk}(x)$,其中 $Z=x+iA(x)$,则易知$\{\Psi_{jk}\}_{(j,k)\in\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}}$是 $L^2(\Gamma)$上的“正交小波基”.

本文利用 Tchamitchian的 B-小波,给出了 $\dot{B}_p^{\alpha,q}(\Gamma)$ ($|\alpha|<1$, $1\leqslant p,q\leqslant\infty$)及 $\dot{F}_p^{\alpha,q}(\Gamma)$ ($|\alpha$

---

* 中山大学高等学术研究中心资助项目

收稿日期: 1995-07-13 李彤彤,女,26岁,博士

$| < 1, 1 < p, q < \infty$)的 B-小波刻画,并对$|$T$| > 1$时的情形进行了讨论.

1 $\dot{B}_p^{T,q}(\Gamma)$与 $\dot{F}_p^{T,q}(\Gamma)$的 B-小波刻画

定义 1[1] 设 $0 < U \leqslant 1, V > 0$,我们称函数 $f: \Gamma \to \mathbf{C}$为一个中心在 $k_0 \in \Gamma$,宽度为 $d > 0$的(U, V)型光滑分子,如果 f满足下面的性质:

① $|f(k)| \leqslant Cd^V/(d + |k - k_0|)^{1+V}, \forall k \in \Gamma$;

② $|f(k) - f(k')| \leqslant C\left(\frac{|k - k'|}{d + |k - k_0|}\right)^U\left[\frac{d^V}{(d + |k - k_0|)^{1+V}} + \frac{d^V}{(d + |k' - k_0|)^{1+V}}\right]$,

$\forall k, k' \in \Gamma$且$|k - k'| < \frac{1}{2}(d + |k - k_0|)$;

③ $\int_\Gamma f(k)\,dk = 0$

记 $_^{(U,V)}(k_0, d)$为所有中心在 $k_0 \in \Gamma$,宽度为 $d > 0$的(U, V)型光滑分子组成的集合.如果 $f \in \_^{(U,V)}(k_0, d)$,则定义 f在$_^{(U,V)}(k_0, d)$的范数为:

$\|f\|_{M^{(U,V)}_0}(k_0, d) = \inf\{C > 0$ 使定义 1中的①② 成立$\}$.

特别地,记$_^{(U,V)} = _^{(U,V)}(iA(0), 1)$.易证 $_^{(U,V)}$构成 Banach空间,并且 $f \in _^{(U,V)}(k_0, d)$为且仅当 $f \in \_^{(U,V)}$.记$(_^{(U,V)})'$为$_^{(U,V)}$的对偶空间,即定义在$_^{(U,V)}$上的有界线性泛函的全体组成的空间,则对任意 $h \in (_^{(U,V)})'$及 $f \in \_^{(U,V)}(k_0, d)$, $\langle h, f\rangle$有意义.

在文[6]中, David, Journe及 Semmes证明了如下的“Calderon型”表示定理:

$$P.V.\int_{-\infty}^{\infty} J_t^2(f)\,dt/t = -f/4 \tag{1}$$

其中算子 J_t的核为

$$J_t(Z, k) = (1/2\pi i)t/(k - Z - it)^2 \tag{2}$$

等式(1)在几乎处处与 $L^p(1 < p < \infty)$范数收敛的意义下成立.

在此基础上,邓、韩证明了(1)式在$_^{(U,V)}$及$(_^{(U,V)})'$意义下也成立,并由此给出了下述定义.

定义 2[1] 设 $-1 < T < 1, \max(0, T) < U < 1, \max(0, -T) < r < 1$.定义 Lipschitz曲线 Γ上的 Besov空间 $\dot{B}_p^{T,q}(\Gamma)(|T| < 1, 1 \leqslant p, q \leqslant \infty)$为所有满足下列不等式的分布 $f \in (_^{(U,V)})'$组成的空间:

$$\|f\|_{\dot{B}_p^{T,q}(\Gamma)} = \left\{\int_{-\infty}^{\infty}(|t|^{-T}\|J_t(f)\|_{L^p(\Gamma)})^q\,dt/|t|\right\}^{\frac{1}{q}} < \infty \tag{3}$$

类似地,定义 Lipschitz曲线上的 Triebel-Lizorkin空间 $\dot{F}_p^{T,q}(\Gamma)(|T| < 1, 1 < p, q < \infty)$为所有满足下述不等式的分布 $f \in (_^{(U,V)})'$所组成的空间:

$$\|f\|_{\dot{F}_p^{T,q}(\Gamma)} = \left\|\left\{\int_{-\infty}^{\infty}(|t|^{-T}|J_t(f)|)^q\,dt/|t|\right\}^{\frac{1}{q}}\right\|_{L^p(\Gamma)} < \infty \tag{4}$$

本文主要结果有:

定理 1 设 $-1 < T < 1, \max(0, T) < U < 1, \max(0, -T) < V < 1, f \in (\_^{(U,V)})'$,则 $f \in \dot{B}_p^{T,q}(\Gamma)$当且仅当 $f = \sum_{j,k \in \mathbf{Z}} T_{jk} J_{jk}$,满足

$$\left\{\sum_{j \in \mathbf{Z}}\left(\sum_{k \in \mathbf{Z}}|2^{(-\frac{1}{p} + T + \frac{1}{2})j} T_{jk}|^p\right)^{\frac{q}{p}}\right\}^{\frac{1}{q}} < \infty \tag{5}$$

其中 $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$.

定理 2　设 $-1<\mathrm{T}<1$, $\max(0,\mathrm{T})<\mathrm{U}<1$, $\max(0,\mathrm{T})<\mathrm{V}<1$, $1<P, q<\infty$, $f\in(\_^{\mathrm{U},\mathrm{V}})'$, 则 $f\in\dot{F}_p^{\mathrm{T},q}(\Gamma)$当且仅当 $f=\sum_{j,k\in\mathbf{Z}}\mathrm{T}_{jk}\mathrm{J}_{jk}$且满足

$$\|\left\{\sum_{j\in\mathbf{Z}}\left(\sum_{k\in\mathbf{Z}}|2^{(\mathrm{T}+\frac{1}{2})j}\mathrm{T}_{jk}\,\mathrm{i}_{Q_{jk}}|\right)^q\right\}^{\frac{1}{q}}\|_{L^p(\Gamma)}<\infty \tag{6}$$

其中 $\mathrm{i}_{Q_{jk}}$表示 $\tilde{Q}_{jk}=\{Z\in C|Z=x+iA(x), x\in Q_{jk}\}$的特征函数, $Q_{jk}=\{x\in\mathbf{R}|2^jx-k\in[0,1]\}$.

根据 B-小波的性质知, $\mathrm{J}_{jk}(Z)\in\_^{(\mathrm{U},\mathrm{V})}$, $\forall j,k\in\mathbf{Z}$;而对 $\dot{B}_p^{\mathrm{T},q}(\Gamma)$及 $\dot{F}_p^{\mathrm{T},q}(\Gamma)$,类似于 $\mathbf{R}$的情形,也有分子分解定理[2],因此定理 1及定理 2的充分性是显然的,故只需证明必要性.

记 $<f,g>=\int_\Gamma f(Z)g(Z)\,dZ$.定理的必要性证明依赖于下列引理.

引理 1　设 $f\in(\_^{(\mathrm{U},\mathrm{V})})'$,则 $f(Z)=\sum_{j,k\in\mathbf{Z}}\mathrm{T}_{jk}\mathrm{J}_{jk}(Z)$其中 $\mathrm{T}_{jk}=<f,\mathrm{J}_{jk}>$且级数在分布意义下收敛.更确切地说,对任意 $0<\mathrm{U}<\mathrm{U}'<1$, $0<\mathrm{V}<\mathrm{V}'<1$, $g\in\_^{(\mathrm{U}',\mathrm{V}')}$,有

$$<f,g>=\lim_{M,N\to\infty}<\sum_{|j|\leqslant M}\sum_{|j|\leqslant N}\mathrm{T}_{jk}<\mathrm{J}_{jk},g> \tag{7}$$

证明　根据对偶推理,我们只需证

$$\|\sum_{|j|\leqslant M}\sum_{|k|\leqslant N}\mathrm{U}_{jk}\mathrm{J}_{jk}-g\|_{-(\mathrm{U},\mathrm{V})}\to 0, M,N\to\infty,\text{其中 }\mathrm{U}_{jk}=\langle g,\mathrm{J}_{jk}\rangle,$$

由于 $\_^{(\mathrm{U}',\mathrm{V}')}\subset L^2(\Gamma)$,故

$$g(Z)=\lim_{M,N\to\infty}\sum_{|j|\leqslant M}\sum_{|j|\leqslant N}\mathrm{U}_{jk}\mathrm{J}_{jk}\qquad(L^2(\Gamma))$$

因此只需证明

$$\|\sum_{|j|>M}\sum_{|j|>N}\mathrm{U}_{jk}\mathrm{J}_{jk}\|_{-(\mathrm{U},\mathrm{V})}\to 0, M,N\to\infty \tag{8}$$

(8)式可利用分子的定义直接证明,在此略去细节.引理 1证毕.

引理 2　对 $1\leqslant p\leqslant\infty$,有

$$\left(\sum_K|2^{\frac{j}{2}}\mathrm{T}_{jk}|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant C2^{\frac{j}{p}}\|D_jf\|_{L^p(\Gamma)}$$

其中　$D_jf=\sum_k<f,\mathrm{J}_{jk}>\mathrm{J}_{jk}$

证明　事实上

$$|\mathrm{T}_{jk}|=|<f,\mathrm{J}_{jk}>|=|<D_jf,\mathrm{J}_{jk}>|\leqslant\int_\Gamma|D_jf(Z)|\cdot|\mathrm{J}_{jk}(Z)||dZ|$$

① 当 $p=\infty$时,由 $\|\mathrm{J}_{jk}\|_{L^1(\Gamma)}\leqslant C2^{-\frac{j}{2}}$即得

$$\|\{2^{\frac{j}{2}}|\mathrm{T}_{jk}|\}_{k\in Z}\|_{l^\infty}\leqslant C\|D_jf\|_\infty.$$

$p=1$的情形是类似的.

② 当 $1<p<\infty$时,设 (p,p')为共轭指标,

$$|\mathrm{T}_{jk}|\leqslant\int_\Gamma|D_jf||\mathrm{J}_{jk}(Z)|^{\frac{1}{p}}|\mathrm{J}_{jk}(Z)|^{\frac{1}{p'}}\cdot|dZ|\leqslant$$

$$\|\mathrm{J}_{jk}\|_{L^{p'}(\Gamma)}^{\frac{1}{p'}}\left(\int_\Gamma|D_j(f)(Z)|^p|\mathrm{J}_{jk}(Z)||dZ|\right)^{\frac{1}{p}}$$

故

$$\left(\sum_k|2^{\frac{j}{2}}\mathrm{T}_{jk}|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant C2^{\frac{j}{p}}\|D_jf\|_{L^p(\Gamma)}.$$

引理 2证毕.

引理 3 $\left\{\sum_{j\in Z}(2^{jT}\| D_j f\|_p)^q\right\}^{\frac{1}{q}}\leqslant C\| f\|_{\dot{B}_p^{T,q}(\Gamma)}$

证明　由 Calderón表示定理,有

$$D_j f = P.V.\ C\int_{-\infty}^{\infty} D_j J_t^2(f)\,\mathrm{d}t/t,$$

所以

$$\| D_j f\|_p\leqslant C\int_{-\infty}^{\infty}\| D_j J_j^2(f)\|_p \mathrm{d}t/|t|\leqslant$$

$$C\int_{-\infty}^{\infty}\| D_j J_t\|_{p,p}\| J_t(f)\|_p \mathrm{d}t/|t|$$

记 $D_j f(Z) = \sum_k < f, \text{J}_{jk} > \text{J}_{jk}(Z) = \int_\Gamma D_j(Z,\text{k})f(\text{k})\mathrm{d}\text{k}$, 即 $D_j(Z,\text{k}) = \sum_k \text{J}_{jk}(Z)\text{J}_{jk}(\text{k})$,

由 J_{jk}的性质,容易得到

$$|D_j(Z,\text{k})|\leqslant C 2^{-j}/(2^{-j}+|Z-\text{k}|)^2$$

注意到 $D_j(Z,\text{k})$及 $J_t(Z,\text{k})$都有零阶消失矩,经过简单运算即得

$$|D_j J_t(Z,\text{k})|\leqslant C\left(\frac{2^{-j}}{|t|}\wedge\frac{|t|}{2^{-j}}\right)^{\text{X}}\frac{(2^{-j}\vee|t|)^{\text{X}}}{[(2^{-j}\vee|t|)+|Z-\text{k}|]^{1+\text{X}}}$$

$\forall\ 0<\text{X}<1$,其中 $a\vee b=\max(a,b)$, $a\wedge b=\min(a,b)$.从而

$$\| D_j J_t\|_{p,p}\leqslant C(2^{-j}/|t|\wedge|t|/2^{-j})^{\text{X}}.$$

我们总可以取$|\text{T}|<\text{X}$,则

$$\left\{\sum_{j\in \mathbf{Z}}(2^{jT}\| D_j f\|_p)^q\right\}^{\frac{1}{q}}\leqslant C\left\{\sum_{j\in \mathbf{Z}}\left(2^{jT}\int_{-\infty}^{\infty}| D_j J t\|_{p,p}\| J t(f)\|_p\frac{\mathrm{d}t}{|t|}\right)^q\right\}^{\frac{1}{q}}\leqslant$$

$$C\left\{\sum_{j\in \mathbf{Z}}\left(2^{jT}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{2^{-j}}{|t|}\wedge\frac{|t|}{2^{-j}}\right)^{\text{X}}\| J_t(f)\|_p\frac{\mathrm{d}t}{|t|}\right)^q\right\}^{\frac{1}{q}}\leqslant$$

$$C\left\{\int_{-\infty}^{\infty}(|t|^{-T}\| J_t(f)\|_p)^q\frac{\mathrm{d}t}{|t|}\right\}^{\frac{1}{q}} = C\| f\|_{\dot{B}_p^{T,q}(\Gamma)}$$

引理 3证毕.

综合引理 1, 2, 3就得到定理 1的必要性证明. Triebel-Lizorkin空间的情形 (即定理 2)是类似的,我们在此不再赘述.

2 讨　论

利用高阶的 Calderón表示定理, Lipschitz曲线上的 Besov空间及 Triebel-Lizorkin空间的定义问题是可以彻底解决的,即指标可以扩展到$|\text{T}|<\infty$, $0<p,q\leqslant\infty$,参见文献 [1, 2, 7, 8].

但当$|\text{T}|\geqslant 1$时,就无法再用 Tchamitchian的 B-小波刻画 $\dot{B}_p^{T,q}(\Gamma)$与 $\dot{F}_p^{T,q}(\Gamma)$.原因是$|\text{T}|\geqslant 1$时,我们需要相应的小波函数是高阶光滑分子[7, 8],这个性质是 B-小波所没有的.如何在 Lipschitz曲线上建立具有高阶光滑性及高阶消失矩的小波基,或者退一步说, Lipschitz曲线上是否存在具有高阶光滑性与高阶消失矩的正交小波基,仍是一个需要继续探讨的问题.

参 考 文 献

1 邓东皋,韩永生. Lipschitz曲线上的 Besov 空间与 Triebel-Lizorkin空间 (I).数学学报, 1992, 35 (5), 608~ 619

2 邓东皋,韩永生. Lipschitz曲线上的 Besov空间与 Triebel-lizorkin空间 (II),数学学报, 1993, 36 (1): 122~ 135

3 Meyer Y. Ondelettes et opérateur(I). Hermann, 1990

4 Meyer Y. Ondelettes et opérateur(II). Hermann, 1990

5 Tchamitchian P. Ondelettes et intégrale de cauchy sur les courbes Lipschitziennes. Annals of Math, 1989, 129, 641~ 649

6 David, G, Journé J. L, Semmes S. Opérateurs de Caledón-Zygmund, Functions para- accretives et Intepolation. Revista Mathematica Iberoamericana, 1985, I4 1~ 56

7 Deng Donggao, Han Yongsheng, The Besov spaces and Triebel Lizorkin spaces with high order on Lipschitz curves. Approximation Theory and its Applications, 1993, 9(4): 89~ 106

8 李彤彤. Lipschitz曲线上的函数空间与平面非光滑区域上的 Hilbert边值问题. [学位论文].广州: 中山大学数学系, 1995

The Characterization of Besov and Triebel-Lizorkin Spaces on Lipschitz Curves by B-Wavelets

Li Tongtong[*] *Deng Donggao*

Abstract By using Tchamitchian's B-Wavelets, a new characterization of Besov and Triebel- Lizorkin Spaces ($|T| < 1, 1 \leqslant p, q \leqslant \infty$) on Lipschitz curvees is given.

Keywords Lipschitz curves, Besov space, Triebel-Lizorkin space, B-wavelets

* Department of Mathematics, Zhongshan University, Guangzhou 510275