中山大学学报 (自然科学版)
第 35卷 第 5期 ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM Vol. 35 No. 5
1996年 9月 UNIVERSITATIS SUNYATSENI Sep. 1996

有限振幅波对复合圆柱绕射波浪力的实用算法*

黄 华 张涤明 孙明光
(中山大学应用力学与工程系,广州 510275)

摘 要 提出了有限振幅波对复合圆柱绕射波浪力(矩)的一种实用计算方法.在 Stokes n阶绕射波速度势已定条件下,用此法可对 $n+1$阶水波所致波浪载荷进行积分形式的工程估算.实算中对慢收敛的无限自由表面积分可采用数学上的渐近方法化简运算;对直立圆柱第 2阶波浪力的实算结果与有关实验数据吻合良好.

关键词 复合圆柱,有限振幅波,绕射,波浪载荷
分类号 O 353.2

Stokes有限振幅波是分析海洋波浪最常用的一种非线性类型的规则水波.

由于有限振幅波的绕射问题具有非线性自由表面条件和辐射条件分析上的困难[1],因此,提出一种避开对二阶绕射波速度势求解、而由格林积分计算对结构第二阶绕射波载的方法[2].本文结合一些海工常用结构的基本特征,通过推广特征解方法,对轴对称复合圆柱的 Stokes一阶绕射波速度势、高阶绕射波浪力(矩)积分解相关辅助势均给出了严格解析解.在直圆柱二阶绕射波浪力的实算中,采用了渐近法化简处理,对无限积分分段,化无限段积分为无穷函数项级数,计算结果与有关实验数据[3]十分吻合.

本文还对涉及高阶绕射波载必需的次高阶绕射波速度势内流域势解形式的建立及在强制辐射条件下一般高阶绕射波浪力(矩)的积分解式进行了分析和推导.

1 基本方法

图 1为一般复合圆柱的综合模式,按轴对称方式对结构流域可以划出 V_1~ V_6六种分域,易证,任何一种实际使用的海工垂直圆柱按同一方式划分的分流域均包含于此 6种基本流域类型之中.为方便计,我们仅选择半浮式简易重力式平台作分析对象.

1.1 波浪力(矩)积分法原理

对于 Stokes有限振幅波,设 H为绕射波流场速度势,作摄动展开,其边值问题为:

$$H(r,\theta,z,t) = XH_1 + X^2H_2 + \cdots + X^nH_n \tag{1}$$

$$H_n = H_n^i + H_n^s = \mathrm{Re}[(h_n^i + h_n^s)e^{-inwt}] = \mathrm{Re}(h_n e^{-inwt}) \tag{2}$$

$$5^2 h_n = 5^2 h_n^i = 5^2 h_n^s = 0 \qquad \left(V = \sum_{i=1}^{3} V_i\right) \tag{3}$$

---

* 中山大学科学基金资助项目
收稿日期: 1995-11-21 黄华,男,34岁,讲师

$$g\partial h_n^s/\partial z - n^2 w^2 h_n^s = (1-W_n)F_n(h_n^i, h_{n-1}, \cdots h_1) \quad (z=h) \tag{4}$$

$$\partial h_n/\partial z = \partial h_n^s/\partial z = \partial h_n^i/\partial z = 0 \quad (z=0) \tag{5}$$

$$\partial h_n/\partial n = 0 \quad (\text{与流域相交物面}) \tag{6}$$

$$\sqrt{r}\,(\partial h_n^s/\partial r - ik_n h_n^s) \to O(r^{-1}) \quad (k_n r >> 1;\ k_n \tanh k_n h = n^2 k^2/g) \tag{7}$$

式中 H_n^i,H_n^s 为第 n 阶入射、散射波速度势.设圆柱固定,即不计辐射势影响,则 H_n 为第 n 阶绕射波速度势;X为摄动参数,k为波频;F_n 为关于 h_n^i(已知)和 n 阶以下水波速度势的可定函数.式(7)为 Sommerfeld辐射条件模式,对于 $n \geqslant 2$,它仅为一种近似模式;对于 $n=2$,另一种严格的辐射条件模式[2]为:

$$h_2^s \sim r^{-\frac{1}{2}}\{N_1(\theta)e^{ik_2 r}\cosh k_z z + N_2(\theta)e^{ik_1 r(1+\cos\theta)} \times \cosh[k_1(2+2\cos\theta)^{\frac{1}{2}}z]\}$$

$$(k_2 r >> 1) \tag{8}$$

式中 $N_1(\theta)$,$N_2(\theta)$为关于角度 θ 的可定函数.

在 $n-1$ 阶($n \geqslant 2$)绕射波速度势已定条件下,可采用格林第二积分来求解第 n 阶绕射波势对结构的波浪力(矩).设定一组线性化的相关辅助势边值问题且令 $h_{ij}^{(nk)}$ 为 V_k 区内第 n 阶相关辅助势,有:

$$5^2 h_{ij}^{(nk)} = 0 \quad (V_k\text{内}, k=1,2,3; i=1,2; j=1,2) \tag{9}$$

$$g(\partial h_{ij}^{(nk)}/\partial z) - n^2 k^2 h_{ij}^{(nk)} = 0 \quad (z=h; V_1, V_3) \tag{10}$$

$$\partial h_{ij}^{(nk)}/\partial z = 0 \quad (z=0; V_1, V_2) \tag{11}$$

$$\sqrt{r}\,(\partial h_{ij}^{(n1)}/\partial r - ik_n h_{ij}^{(n1)}) \to O(r^{-1}) \quad (k_n r >> 1) \tag{12}$$

$$\partial h_{ij}^{(nk)}/\partial n = n_{ij} \quad (\text{柱体表面}) \tag{13}$$

其中 i 与 j 对应水平波力(矩)($i=1$; $j=1,2$)及垂直波力(矩)($i=2$; $j=1,2$) 4种形式,且:

$$n_{ij} = \begin{cases} W_{ij}\cos\theta(W_{1j} + W_{ij}z) & (\text{水平方向柱面}) \\ W_z(W_{1j} + W_{2j}\cdot r\cos\theta) & (\text{垂直方向柱面}) \end{cases} \tag{14}$$

工程待求的第 n 阶绕射波浪载荷包括第 n 阶入射波载、散射波载以及 n 阶以下水波速度势非线性相互耦合项所引起波载三项,故实际待求量仅为由第 n 阶散射波速度势所致波浪载荷,记为 $F_{ij}^{(ns)}$,基本式为:

$$\begin{cases} F_{ij}^{(ns)} = -\iint_{s_b} d\dfrac{\partial H_n^s}{\partial t} n_{ij}\,ds = \mathrm{Re}[d n k i e^{-inwt} I_{ij}^{(n)}] \\ I_{ij}^{(n)} = \iint_{s_b} h_n^s n_{ij}\,ds = \iint_{s_b} h_n^s \dfrac{\partial h_{ij}^{(nk)}}{\partial n}\,ds \end{cases} \tag{15}$$

式中 d为水密度、S_b 表示物面.显然,$I_{ij}^{(n)}$ 是计算的关键,由格林第二积分,易得:

$$\begin{aligned} I_{ij}^{(n)} &= \iint_{s_b} h_n^s n_{ij}\,ds = \iint_{s_b} h_n^s \frac{\partial h_{ij}^{(nk)}}{\partial n}\,ds = \\ &\iiint_V (h_n^s 5^2 h_{ij}^{(nk)} - h_{ij}^{(nk)} 5^2 h_n^s)\,dV - \iint_{S_b} \frac{\partial h_n^i}{\partial n} h_{ij}^{(nk)}\,ds + \\ &\left(\iint_{s_0} + \iint_{s_\infty} + \iint_{s_f}\right)\left(h_{ij}^{(nk)} \frac{\partial h_n^s}{\partial n} - \frac{\partial h_{ij}^{(nk)}}{\partial n} h_n^s\right) ds \end{aligned} \tag{16}$$

式中 s_0、s_f 和 s_∞ 分别表示海底、自由水面及无穷远处圆柱面.利用关于 h_n^s 及 $h_{ij}^{(nk)}$ 边值问题中

式(2)～(14),易证:

$$I_{ij}^{(n)} = -\iint_{S_b}\frac{\partial \varphi_n^{i}}{\partial n}\varphi_j^{(nk)}\,ds + g^{-1}\iint_{S_f} rF_n(\varphi_n^{i},\varphi_{n-1},\cdots,\varphi_1)\varphi_j^{(nk)}\,d\theta\,dr \qquad (17)$$

上式已回避了对 n 阶散射波速度势 φ_n^{s} 的直接求解.

1.2　一阶波速度势解的形式

一阶绕射波速度势是高阶绕射波浪力积分运算的基本值,它的精确解可由对特征解方法的推广得出.设 $\varphi_1^{(k)}$ 为 $V_k(k=1,2,3)$ 内绕射波速度势,可取:

$$\varphi_1^{(k)} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(k)}(r,z)\cos n\theta$$

$$f_n^{(k)}(r,z) = -\frac{\delta_{1k}\, i^{n+1}(2-\delta_{n0})\,gH}{2\omega\cosh k_1 h}J_n(k_1 r)\cosh k_1 z + \sum_{m=0}^{\infty}P_{nm}^{(k)}(r,z) \qquad (18)$$

其中 H 为波高; $J_n(x)$, $H_n^{(1)}(x)$ 为第一、三类贝塞尔函数,且有:

$$P_{nm}^{(1)}(r,z) = A_{nm}^{(1)}K_n(k_m^{(1)}r)\cos k_m^{(1)}z \qquad (k_m^{(1)}\operatorname{tg}k_m^{(1)}h = -\omega^2 g^{-1};\ m=0,1,2,\cdots) \qquad (19)$$

$$P_{nm}^{(2)}(r,z) = A_{nm}^{(2)}[\delta_{m0}r^n + 2(1-\delta_{m0})I_n(m\pi h_1^{-1}r)]\cos m\pi h_1^{-1}z \qquad (m=0,1,2,\cdots) \qquad (20)$$

$$P_{nm}^{(3)}(r,z) = [A_{nm}^{(3)}I_n(k_m^{(3)}r) + B_{nm}^{(3)}K_n(k_m^{(3)}r)]\cos k_m^{(3)}(z-h_1-h_2)$$
$$(k_m^{(3)}\operatorname{tg}k_m^{(3)}(h-h_1-h_2) = -\omega^2 g^{-1};\ m=0,1,2,\cdots) \qquad (21)$$

式中 $I_n(x)$、$K_n(x)$ 为第一类和第二类变型贝塞尔函数; $A_{nm}^{(1)}$, $A_{nm}^{(2)}$, $A_{nm}^{(3)}$ 及 $B_{nm}^{(3)}$ 为待定级数系数.易验证 $\varphi_1^{(k)}$ 已满足除径向柱侧面条件外的所有其它边值条件和基本方程.利用圆柱径向表面流速为零条件,另引入 V_1 与 V_2 和 V_1 与 V_3 交界面处水流动连续条件:

$$\varphi_1^{(1)} = \varphi_1^{(2)},\ \partial\varphi_1^{(1)}/\partial r = \partial\varphi_1^{(2)}/\partial r \qquad (r=a_1,\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,\ 0\leqslant z\leqslant h_1) \qquad (22)$$

$$\varphi_1^{(1)} = \varphi_1^{(3)},\ \partial\varphi_1^{(1)}/\partial r = \partial\varphi_1^{(3)}/\partial r \qquad (r=a_1,\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,\ h_1+h_2\leqslant z\leqslant h) \qquad (23)$$

另外;再注意到函数系 $\{\cos m\pi h_1^{-1}z,\ 0\leqslant z\leqslant h_1\}$, $\{\cos k_m^{(3)}(z-h_1-h_2),\ h_1+h_2\leqslant z\leqslant h\}$ 和 $\{\cos k_m^{(1)}z,\ 0\leqslant z\leqslant h\}$ 的正交性,由富氏级数展开法即可得到关于 4项未知系数的完备无限维代数方程组.由于方程组的带状特征及特殊函数自身性质,通常无限维代数方程组在一个较小的有限维截项计算范围内即可达到所需精度.

1.3　内流域高阶绕射波速度势解的一种形式

对于 V_2 区域,势解可按与一阶势式(18)、(20)完全相同形式选取;对于 V_3 区域,可取:

$$\varphi_{n'}^{(3)} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}[\bar{p}_{nm}(r,z) + C_{nm}R_{nm}(\lambda_{nm}r)\cosh\lambda_{nm}z]\cos n\theta \qquad (24)$$

式中 n' 表示次高阶数(例如第 2阶); $\bar{P}_{nm}(r,z)$ 与式(21) $P_{nm}^{(3)}(r,z)$ 表达式形式相同,但应由 μ_m 代替原式中 $k_m^{(3)}$,且有 $\mu_m\operatorname{tg}\mu_m(h-h_1-h_2) = -(n'\omega)^2g^{-1}$.另有:

$$R_{nm}(\lambda_{nm}r) = J_n(\lambda_{nm}r)Y_n'(\lambda_{nm}a_2) - Y_n(\lambda_{nm}r)J_n'(\lambda_{nm}a_2) \qquad (25)$$

其中 λ_{nm} 由 $R_{nm}(\lambda_{nm}a_1)$ 或 $R_{nm}'(\lambda_{nm}a_1)=0$ 确定(须 $\lambda_{nm}\tanh\lambda_{nm}h\neq-(n'\omega)^2g^{-1}$).通过利用 $\{R_{nm}(\lambda_{nm}r)\}\cos n\theta$ 在 V_3 自由面上($z=h$)之带权正交性,再利用非线性自由表面条件,由贝塞尔级数展开即可确定 C_{nm},由此给定的 $\varphi_{n'}^{(3)}$ 满足 n' 阶波自由表面条件.

按以上方法选取的次高阶绕射波速度势解可以作为一种可能解加以应用,未知级数系数的确定方法与一阶问题相同;而 V_1 区域内相应的势解可采用对应直圆柱问题的扰动源

法[4].

1.4 相关辅助势解

辅助势 $h_{ij}^{(nk)}$的解析确定,对于式(17)积分 $I_{ij}^{(n)}$内函的解析化是必要的.仍然推广特征解法求解.设定:

$$l = W_j + (1 - W_j) W_{2j} \qquad (i, j = 1, 2) \tag{26}$$

可选取

$$h_{ij}^{(nk)} = \sum_{m=0}^{\infty} [L_{lm}^{(nk)}(r, z) + G_{lm}^{(nk)}(r, z)] \cos l\theta \tag{27}$$

其中,$L_{lm}^{(nk)}(r,z)$与式(18)中 $P_{nm}^{(k)}(r,z)$取相同形式,并以 $a_{ijm}^{(nk)}$,$b_{ijm}^{(nk)}$,$\lambda_n^{(nk)}$代替原式(19)~(21)中相应的 $A_{nm}^{(k)}$,$B_{nm}^{(k)}$和 $k_m^{(k)}$,另以 nw 代替原式中波频 k.

另有:

$$G_{lm}^{n1}(r, z) = 0 \tag{28}$$

$$G_{lm}^{n2}(r, z) = W_{2j}^{(1)} C_{ijm}^{(1)}(u_m r) \cos l\theta \cosh u_m z \qquad (J_l(u_m a_1) = 0) \tag{29}$$

$$G_{lm}^{(n3)}(r, z) = W_{2i} C_{ijm}^{(2)} Rl(V_m r) \cos l\theta Z_m(z) \tag{30}$$

其中 $R_l(V_m r) = J_l(V_m r) Y_l'(V_m a_2) - Y_l(V_m r) J_l'(V_m a_2) \qquad R_l'(V_m a_l) = 0$

$$Z_m(z) = \begin{cases} \cos V_m z & (V_m \tanh V_m h = n^2 k^2 g^{-1}) \\ D_m \cosh V_m z + \sinh V_m z & (V_m \tanh V_m h \neq n^2 k^2 g^{-1}) \\ & (D_m \text{满足 } g Z_m'(h) - n^2 k^2 Z_m(h) = 0) \end{cases}$$

式中 $Y_l(x)$为第二类贝塞尔函数.利用函数系$\{J_l(u_m r), 0 \leqslant r \leqslant a_l, z = h_l\}$及$\{R_l(V_m r), a_2 \leqslant r \leqslant a_l, z = h_l + h_2\}$的带权正交性,由贝塞尔级数展开法原理及关于辅助势 $h_{ij}^{(nk)}$柱体垂直表面条件式(13),(14),即可确定出系数 $C_{ijm}^{(1)}$和 $C_{ijm}^{(2)}$.而对于未知系数 $a_{ijm}^{(n1)}$,$a_{ijm}^{(n2)}$,$a_{ijm}^{(n3)}$,$b_{ijm}^{(n3)}$的确定可完全参照一阶波速度势的区域界面处理法,由富氏级数展开取得相应的无限维代数方程组,再作有限维截项计算即可.

2 实算分析

为校验方法的有效性,本文选择了固立刺水面直圆柱(图 1 $a_1 = a_2 = a_3 = a_4$ 且 $h_1 = h_6 = 0$ 的特殊情形)的特例进行实算,并取 Stokes第二阶绕射水波为实算波型.具体计算涉及一阶势波浪力、一阶势耦合所致二阶倍频波浪力、二阶定常波浪力及二阶势波浪力 4项作用的计算.其中由二阶散射势所致波浪力计算涉及本文提出的方法,而式(17)对 $I_{ij}^{(2)}$中无限自由面的积分计算为整个计算的关键.按一般数值方法,收敛一般很慢,主要是对应无穷级数 m 为零的势解分量(含汉克耳函数)以 $1/\sqrt{r}$ 因子在远距离区段缓慢振动衰减所至.

图 1 垂直复合圆柱流域划分基本形式

Fig. 1 Segment represention of fluid field for vertical compound circular cylinder

本文提出了按渐近法对积分作数学处理的实 用方法来简化积分运算,即将无限自由面作分段处理,利用贝塞尔函数渐近性质及若干特殊积分关系将无限段积分化为绝对收敛的无穷函数项级数,而有限段积分可利用特殊函数部分关系(如递推关系)再结合数值积分运

图 2 对圆柱的最大二阶波力

Fig. 2 Maximum second order wave forces on a vertical cylinder

算[5].

图 2为实算的 2项主要结果.图 2a为给定参数 H/h 与 h/a_1 下最大二阶水平波浪力随绕射参数 K_1a_1 的变化状况,它与有关实验结果极为吻合,在理论上又避免了直接求水波势解的数学近似性.图 2b反映了二阶最大波浪力随相对波高 H/h 的变化趋势,显示随 H/h 减小,第二阶非线性水平波浪力减弱. C_{f1}为无量纲最大二阶总波浪力值.实算显示了本文提出方法的有效和实用性.按相同步骤可对任意其它类型的复合垂直圆柱作类似计算.

3 结 论

(1)由格林积分原理并推广特征解方法,提出了计算一般海工垂直复合圆柱对有限振幅波绕射作用的实用算法.理论主要包括一阶水波势精确解,第 n 阶相关辅助势精确解及高阶绕射波浪力积分解的一般形式.

(2)按本文方法可回避对 n 阶 ($n\geqslant 2$)水波速度势直接求解的困难,在 $n-1$阶波势已定条件下,由积分得出第 n阶绕射波势对结构的波浪作用.

(3)本文对直立圆柱二阶绕射波浪力问题予以了实算,结果与有关实验极为吻合.实算中采用了综合处理法(渐近法等)来简化无限自由面的慢收敛积分.

参 考 文 献

1 缪国平,刘应中.无限深水表面压力脉动产生的速度势与二阶绕射问题的辐射条件.水动力学研究与进展, 1989, 4(2): 72~ 83

2 Mei C C. The Applied Dynamics of Ocean Surface Waves. New York: A Wiley-Intersciene publication, 1983. 657~ 667

3 Chakrabarti S K. Second-order wave force on large vertical cylinder. J Waterways Harbors and Coastal Eng. Div, ASCE, 1975, 101(ww3): 311~317

4 程静,刘应中,缪国平.大直径圆柱体上二阶波浪力.水动力学研究与进展, 1988, 3(3): 44~55

5 黄华,张涤明,孙明光.垂直圆柱高阶波浪力的积分计算. 1995年全国水动力学研讨会文集.北京:海洋出版社, 1995. 116~121

A Practical Method of the Evaluation of the Finite Amplitude Wave Forces on Vertical Compound Circular Cylinders

Huang Hua[*] *Zhang Diming* *Sun Mingguang*

Abstract A utility method is presented and used to calculate the Stokes finite amplitude wave forces on vertical circular cyclinders commonly used in offshore structures. The $n+1$ order diffracted wave loads may be evaluated by using this method when the n order wave velocity potential is given. A special asymptotic method may simplify the calculation of the nonlinear term integral over infinite free surface. The results of second-order diffracted wave forces on an isolated surface piecing vertial cylinder tally with the related experimental data.

Keywords compound circular cylinder, diffraction, finite amplitude wave, wave load

* Department of Applied Mechanics and Engineering, Zhongshan University, Guangzhou 510275