

单摆摆锤偏心引起的测量误差分析*

唐孟希

(中山大学物理学系, 广州 510275)

吴书朝 罗俊

(华中理工大学物理学系)

摘要 给出了偏心存在的情况下单摆的运动方程及其线性近似解, 以及对测量精度和测量方法的影响. 通过计算机数值计算, 给出了典型参数下的单摆运动. 结果表明, 只要偏心量被控制在某一区域以外, 单摆仍然以某一单一频率为主作振动, 这时, 偏心量导致的系统误差仍可控制在一定范围以内.

关键词 单摆, 偏心, 线性近似

分类号 O 412, O 421. 2

单摆在历史上曾经发挥过巨大的作用^[1,2]. 但随着测量精度的提高, 单摆正逐渐失去它以往的地位, 在地球物理测量中, 重力测量已更多地采用根据弹簧秤原理制成的重力仪或用自由下落以及垂直上抛的方法直接计算 g .

影响单摆周期测量精度的因素很多, 人们为克服其误差源的影响也做了大量的工作^[3,4], 单摆的理论精度可望达到 10^{-7} ^[2]. 但在实际的单摆中, 由于机械加工精度和单摆安装精度的限制以及摆锤材质的不均匀等因素影响, 在单摆中将不可避免地出现摆锤的偏心问题. 关于这一点至今还没有人进行过比较深入的研究. 本文将就此进行探讨, 给出在偏心存在的情况下单摆的运动方程及其线性近似, 以及对测量精度和测量方法的影响, 并用计算机数值方法给出某些典型情况下的数值解.

1 运动方程及其求解

对于一个如图 1 所示的偏心单摆系统, 令其摆线长为 l , 悬挂点 A 与摆锤质心 C 间的距离为 a , 摆锤回转半径为 R , 质量为 m , 摆线与垂直方向的夹角为 θ_1 , 悬挂点 A 与质心 C 的连线与垂直方向的夹角为 θ_2 , 则系统的拉格朗日函数为

$$L = \frac{1}{2}m [\dot{l}^2\theta_1^2 + a^2\dot{\theta}_2^2 + 2a\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2)] + \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}_2^2 + mg(l\cos\theta_1 + T\cos\theta_2) \quad (1)$$

其对应的拉格朗日方程为

$$l\ddot{\theta}_1 + a\ddot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2) + a\dot{\theta}_2^2\sin(\theta_1 - \theta_2) + g\sin\theta_1 = 0 \quad (2)$$

$$(R^2 + a^2)\ddot{\theta}_2 + a\dot{\theta}_1\cos(\theta_1 - \theta_2) - a\dot{\theta}_1^2\sin(\theta_1 - \theta_2) + g\sin\theta_2 = 0 \quad (3)$$

若摆线刚好系在质心上, 即 $a = 0$, 则上述方程组简化为

* 国家自然科学基金资助项目

收稿日期: 1995-10-17 唐孟希, 男, 50岁, 副教授

$$\ddot{\theta}_1 + g \sin \theta_1 = 0 \quad (4)$$

$$\ddot{\theta} = 0 \quad (5)$$

容易看出, (4)式就是一般的单摆运动方程,即系统已退化为单摆. 而由(5)式可知 $\dot{\theta}_2 = \text{const}$, 摆锤以一固定的角速度绕悬点, 即质心转动. 若选择合适的初始条件 $\dot{\theta}_2 = 0, \theta_2$ 则保持不变.

当 $a \neq 0$ 时, 单摆的运动由(2)(3)式决定. (2)(3)式是一非线性方程组, 求解存在数学上的困难. 我们将在物理意义合理的前提下进行数学上的线性近似.

从物理意义来看, $a\dot{\theta}_2^2$ 表示质心 C 绕 A 点转动的向心加速度. 除非在初始条件中人为地给偏心单摆一个很大的 $\dot{\theta}_2$, 否则由于质心 C 绕 A 点转动的向心加速度要比重力加速度 g 小得多, 即 $a\dot{\theta}_2^2 \ll g$; 同样, $\dot{\theta}_1^2$ 表示 A 点绕 O 点转动的向心加速度, 只要单摆的摆幅 θ_{10} 满足 $\theta_{10} \ll 1$, 也有 $\dot{\theta}_1^2 \ll g$. 故(2)式中的 $a\dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2)$ 和 $g \sin \theta_1$ 相比可以忽略, (3)式中的 $a\dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2)$ 和 $ga \sin \theta_2$ 相比也可以忽略. 在小摆幅的情况下, 取 $\cos(\theta_1 - \theta_2) \approx 1$, $\sin \theta_1 \approx \theta_1$, $\sin \theta_2 \approx \theta_2$, (2)(3)两式变为

$$\ddot{\theta}_1 + a\ddot{\theta}_2 + g\theta_1 = 0 \quad (6)$$

$$(R^2 + a^2)\ddot{\theta}_2 + a\ddot{\theta}_1 + g\theta_2 = 0 \quad (7)$$

从数学上来看, 由于 $a\dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2)$ 和 $a\dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2)$ 的展开式中 $\dot{\theta}_1$ 和 $\dot{\theta}_2$ 最低次项均为二次, 在对方程(2)(3)进行线性近似时应该略去. 这样, (6)(7)两式确实是方程(2)(3)的线性近似.

从实验上合理的实际情况出发, 我们可以把初始条件设定为: 当 $t = 0$ 时, $\theta_1 = \theta_{10}, \theta_2 = \theta_{20}, \dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_2 = 0$, 由(6)(7)式可解得

$$\theta_1 = A_1 \cos k_1 t + A_2 \cos k_2 t \quad (8)$$

$$\theta_2 = B_1 \cos k_1 t + B_2 \cos k_2 t \quad (9)$$

其中 $k_1^2 = \frac{R^2 + a^2 + al}{2R^2} \left\{ 1 - \left[1 - \frac{4alR^2}{(R^2 + a^2 + al)^2} \right]^{\frac{1}{2}} \right\} k_0^2 \quad (10)$

$$k_2^2 = \frac{R^2 + a^2 + al}{2R^2} \left\{ 1 + \left[1 - \frac{4alR^2}{(R^2 + a^2 + al)^2} \right]^{\frac{1}{2}} \right\} k_0^2 \quad (11)$$

$$A_1 = [\theta_{10} k_1^2 (g - k_2^2 l) - \theta_{20} k_1^2 k_2^2 a] / g (k_1^2 - k_2^2) \quad (12)$$

$$A_2 = [-\theta_{10} k_2^2 (g - k_1^2 l) + \theta_{20} k_1^2 k_2^2 a] / g (k_1^2 - k_2^2) \quad (13)$$

$$B_1 = [\theta_{10} (g - k_1^2 l) (g - k_2^2 l) - \theta_{20} a k_2^2 (g - k_1^2 l)] / ga (k_1^2 - k_2^2) \quad (14)$$

$$B_2 = [-\theta_{10} (g - k_2^2 l) (g - k_1^2 l) + \theta_{20} a k_1^2 (g - k_2^2 l)] / ga (k_1^2 - k_2^2) \quad (15)$$

而 $k_0^2 = g/l$. 偏心距 $a = 0$ 时, 该系统退化为理想单摆, 这时 $k_1 = 0, k_2 = k_0$.

2 频率和振幅的讨论

在实际测量中, 我们是把摆线相邻两次以相同速度方向通过同一位置, 一般是平衡位置的时间间隔当作摆的周期. 因此我们主要关心的是摆线的运动规律, 即 θ_1 与 t 的关系. 由(8)式可知, θ_1 的运动由两个不同频率 k_1 和 k_2 的简谐运动叠加而成. 当 $k_1 : k_2$ 不能写成简单整数比的情况下, θ_1 在作非周期运动. 这种非周期运动似乎是杂乱无章的, 并无规律性可言. 然

图 1 偏心单摆

Fig. 1 A single pendulum with eccentric weight

而通过具体的数值计算,却可以发现某些非常有趣的现象.

我们把摆线长 l 和摆锤的回转半径 R 分别固定为 $l=1\text{ m}$ 及 $R=0.05\text{ m}$, 就可以用计算机分别作出在不同的启动方式下,即不同的初始条件下,频率 k_1, k_2 , 振幅 A_1, A_2 随着偏心距离 a 的变化曲线.

(1) 初始位置为 $\theta_{10}=0.01\text{ rad}, \theta_{20}=0$, 初始速度 $\dot{\theta}_{10}=\dot{\theta}_{20}=0$ 的运动规律.

如果将摆锤由悬点位置拉开一小段位移, 则 $\theta_{20}=0$. 我们取摆线偏离平衡位置的初始值为 $\theta_{10}=0.01\text{ rad}$ 进行计算, 用计算机作出的频率 k_1, k_2 , 振幅 A_1, A_2 随着偏心距离 a 的变化曲线分别如图 2 和图 3 所示.

图 2 频率随偏心距离的变化曲线

Fig. 2 Curve of frequencies k_1, k_2 with respect to eccentricity a

图 3 由悬点启动时, 振幅随偏心距离的变化曲线

Fig. 3 Curve of amplitudes A_1, A_2 with respect to eccentricity a for single pendulum started from suspension point

由图 3 可以看出, 除了 $a=2.5\text{ mm}$ (该交点可以由 (12) 及 (13) 令 $A_1=A_2$ 而直接求得) 附近的微小区域以外, A_1 和 A_2 的大小都有非常显著的差别. 当 $a < 1\text{ mm}$ 时, $A_2/A_1 > 10^4$, 即 $A_2 \gg A_1$, 此时叠加运动表现为以频率 k_2 为主的振动, 而当 $5\text{ mm} < a < 2\text{ cm}$ 时, $A_1/A_2 < 38$, 也可以看成 $A_1 \ll A_2$, 此时叠加运动表现为以频率 k_1 为主的振动. 而当 $a \approx 2.5\text{ mm}$ 时, A_1 和 A_2 很接近, 运动规律显得比较复杂. 若令 $A_1=A_2=A$, 则

$$A_1 \cos k_1 t + A_2 \cos k_2 t = 2A \cos \frac{k_1 - k_2}{2} t \cos \frac{k_1 + k_2}{2} t$$

可以看成是以 $(k_1 - k_2)/2$ 的频率对 $(k_1 + k_2)/2$ 为频率的振动进行幅度调制.

(2) 初始位置为 $\theta_{10}=0.01\text{ rad}, \theta_{20}=0.015\text{ rad}$, 初始速度 $\dot{\theta}_{10}=\dot{\theta}_{20}$ 的运动规律.

如果从摆锤底部启动, 则 $\theta_{20} > \theta_{10}$, 我们不妨取 $\theta_{10}=0.01\text{ rad}, \theta_{20}=0.015\text{ rad}$ 进行计算. 由 (10) (11) 可以看出, 在我们所取的近似条件下, k_1, k_2 与 θ_{10}, θ_{20} 无关, 故 k_1, k_2 的曲线仍然如图 2 所示. 图 4 为此时 A_1, A_2 随着偏心距离 a 的变化曲线, 它与图 3 具有相似的特点.

令 $A_1=A_2$, 则可以求出图 4 中的交点为 $a=2.5\text{ mm}$. 当 $a < 1\text{ mm}$ 时, $A_2/A_1 > 10^3$, 即 $A_2 \gg A_1$; 当 $5\text{ mm} < a < 2\text{ cm}$ 时, $A_1/A_2 > 100$, 即 $A_1 \gg A_2$. 叠加运动的结果与上述相应的情形完全类似.

3 准周期的讨论

上面的讨论可以看出, 当偏心存在, 即 $a \neq 0$ 时, 摆线的运动由两个不同频率的振动叠加而成, 一般情况下, 摆线相邻两次以相同速度方向通过平衡位置的时间间隔并不相等. 但从

以上的数值可以看出,当某一种频率的振动占主导地位时,摆动仍然具有一定的周期性.我们可以把任意两个以相同速度方向通过平衡位置的时间间隔称为准周期,显然各准周期期间的差别应该是很小的.

图 4 由底部启动时,振幅随偏心距离的变化曲线

Fig. 4 Curve of amplitudes A_1, A_2 with respect to eccentricity a for single pendulum, started from the end of weight

图 5 过零点的对应关系

Fig. 5 One-one relationship between times when the suspension wire passes through zero-point

下面我们将先证明,当由两个频率不等的简谐振动叠加而成的运动以某一频率(例如 k_1)的振动为主时,另一频率 k_2 的扰动只会使过零间隔发生微小变化,只要 $k_1 A_1 > k_2 A_2$ 成立,受扰动振动的过零点序列和未受扰动振动的过零点序列仍能保持一一对应的关系,如图 5 所示,其中 A_1, A_2 为两个频率 k_1, k_2 对应的振幅.图中上方的曲线表示未受 k_2 扰动时的情形,下方的曲线表示受 k_2 扰动后的情形.

在按单一频率 k_1 振动时,相邻的最低峰与最高峰之间显然有并且仅有一个零点.当受到 k_2 微小扰动后,虽然原来最高峰和最低峰位置可能发生移动,但由于 $k_1 A_1 > k_2 A_2$,是最高峰和最低峰一定位于零点的两侧,即最高峰和最低峰之间至少存在一个零点.

我们讨论 $y = y_1 + y_2 = A_1 \sin k_1 t + A_2 \sin(k_2 t + h)$, $-\pi/2 < k_1 t < \pi/2$ 的情形.显然,当 $|y_1| > A_2$ 等,零点不可能出现.即过零点只能出现在 $|y_1| \leq A_2$ 的范围,即出现在

$$-\arcsin(A_2/A_1) \leq k_1 t \leq \arcsin(A_2/A_1)$$

的范围内,而

$$\begin{aligned} dy/dt &= \cos k_1 t [k_1 A_1 + k_2 A_2 \cos(k_2 t + h) / \cos k_1 t] > \cos k_1 t [k_1 A_1 + k_2 A_2 \cos(k_2 t + h)] \\ &> (k_1 A_1 - k_2 A_2) \cos k_1 t \end{aligned}$$

若 $k_1 A_1 > k_2 A_2$,在我们考虑的区间内, $dy/dt > 0$,即 y 为单调函数, y 在该区间内仅存在唯一的零点.

以上的讨论对上述振动在其他区间的情形,及以 k_2 为主的情形均成立.

如图 5,假定, M, N 之间的时间间隔为 $n T_1$, $T_1 = 2\pi/k_1$,则由于 k_2 的存在, M', N' 之间的时间间隔变成 $n T_1 + \Delta t_{MM'} + \Delta t_{NN'}$,即测量了 n 个准周期.用这 n 个准周期的平均值

$$T_1^* = T_1 + (1/n)(\Delta t_{MM'} + \Delta t_{NN'}) \tag{16}$$

作为 T_1 的测量值.图 5 中显然有

$$|A_1 \sin(k_1 \Delta t_{NN'})| < A_2 \tag{17}$$

近似地认为

$$\sin(k_1 \Delta t_{NN'}) = k_1 \Delta t_{NN'} \quad (18)$$

则 $|\Delta t_{NN'}| < A_2 / A_1 k_1$

同样 $|\Delta t_{MM'}| < A_2 / A_1 k_1$ (19)

由(16)式, T_1 的测量误差

$$|\Delta T_1| = |(1/n)(\Delta t_{MM'} + \Delta t_{NN'})| \leq (1/n)(|\Delta t_{MM'}| + |\Delta t_{NN'}|) < 2A_2 / k_1 A_1 \quad (20)$$

即 $|\Delta T_1 / T_1| < A_2 / n c A_1$ (21)

取准周期个数 $n = 1000$, 当 $5 \text{ mm} < a < 2 \text{ cm}$ 时, $A_2 / A_1 < 3 \times 10^{-2}$, 有 $|\Delta T_1 / T_1| < 10^{-5}$, 用于测量 g 时 $|\Delta g / g| < 2 \times 10^{-5}$; 而当 $a < 1 \text{ mm}$ 时, $A_1 / A_2 < 10^{-3}$, 若我们以 k_2 为主振动测量时, 有 $|\Delta T_2 / T_2| < 4 \times 10^{-7}$, $|\Delta g / g| < 10^{-6}$.

在假定的参数下, 按现有的技术条件, n 可以进一步加大, 测量误差可以进一步变小.

以上用作数值分析的单摆参数有一定的典型意义. 在实际测量中, 都希望摆动以某一种频率为主, 而应该避免两种频率振幅接近相等的情形. 可以预期, 对于每一组 l 和 R 值, 都存在一个 $A_1 \approx A_2$ 的值. 我们在制作单摆时, 只要避开这个区域而选取合适的 a 值, 就可以在偏心存在的情况下, 单摆仍然以某一单一频率为主进行振动. 这时由于偏心 a 存在而导致的系统误差便可控制在一定范围以内.

参 考 文 献

- 1 温伯格. 引力论和宇宙论. 邹振隆等译. 北京: 科学出版社, 1980. 12
- 2 力武常次, 秋原幸男. 物理地学. 郑建中译. 北京: 地震出版社, 1980. 30
- 3 Chen Y T, Alan Cook. Gravitational experiments in the laboratory. Cambridge University Press, 1993. 68
- 4 Kleppner D, Kolenkow R J. 力学引论. 宁远源等译. 北京: 人民教育出版社, 1980. 334

The Measurement Error Caused by the Eccentric Weight of a Single Pendulum

Tang Mengxi* Wu Shuchao Luo Jun

Abstract It is impossible to avoid the appearance of the eccentricity of the weight for a single pendulum. The moving equations of an eccentric single pendulum, their linear approximate solution and effects on the precision and method of measurement are given. For a single pendulum with typical parameters, with the aid of computer, numerical solutions are shown. The results show that the pendulum can keep approximately in a harmonic motion with a single frequency, and the systematic error, caused by the eccentricity, can be controlled within a region, only if the eccentricity is out of a certain small region.

Keywords single pendulum, eccentric, linear approximation

* Department of Physics, Zhongshan University, Guangzhou 510275