第 36卷　增　刊　　中山大学学报 (自然科学版)　　Vol. 36　Suppl.
1997年　6月　　ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM UNIVERSITATIS SUNYATSENI　　Jun.　1997

两性几何平均人口模型参数估计的线性化方法*

黎罗罗　吴存良
(中山大学岭南学院，广州 510275)

摘　要　就非线性的两性几何平均人口模型中的参数估计问题，本文在可获得男女两性人口离散数据的情况下，给出参数估计的线性化方法：通过样条函数拟合人口数据，求解线性方程组，可获得模型参数的最小二乘估计.

关键词　人口模型，样条函数，线性化
分类号　Q 141

1 引　言

人口统计学上有过许多描述人口增长的模型，例如指数模型、对数模型那样的总人口增长模型. 目前普遍认为：综合考虑两性影响的模型比总人口模型或单一性别的模型要好. 事实上，男性、女性数量的不平衡将对新生儿人数、进而对总人口有影响. 由 Kendall[1]及 Keyfitz[2]提出的两性几何平均模型就是其中一种综合考虑两性因素的非线性微分方程组模型

$$\begin{cases} \mathrm{d}M/\mathrm{d}t = -\mathrm{T}M(t) + \mathrm{U}\sqrt{M(t)F(t)} \\ \mathrm{d}F/\mathrm{d}t = -\mathrm{V}F(t) + \mathrm{W}\sqrt{M(t)F(t)} \\ M(0) = C_1, \qquad F(0) = C_2 \end{cases} \qquad 0 \leqslant t \leqslant t_{\max} \tag{1}$$

其中 $M(t)$，$F(t)$ 分别表示男，女性人口依时间变化的函数：T，U，V，W是常数；C_1，C_2 是 M，F 的初值. 模型假定：在所讨论时间的区间 $t \in [0, t_{\max}]$ 内，男性因死亡或迁移的人口下降率，正比于现有男性人数，即 $\mathrm{T}M(t)$；其新生函数则正比于现有两性人口的几何平均，即 $\mathrm{U}\sqrt{MF}$. 对女性作类似假定，参数 T，U，… 等依所讨论时期、地域不同而不同，受自然、社会因素的影响. 当这些参数已经确定，即模型完全给出时，就可以求模型微分方程的解，进行人口分析、预测等工作.

文 [3]以估计 W与 C_2 为例，介绍了在总人口离散数据已知的情况下，以极小化 $S = \sum [M(t_i) + F(t_i) - T_i]^2$ 为判据，估计模型中未知参数的拟线性化方法. 拟线性化方法是由动态规划专家 Bellman等提出的迭代算法. 它的缺点是每一步迭代须解一组微分方程，计

* 收稿日期：1996-12-05　黎罗罗，男，52岁，副教授

算量大;而且迭代初值不当则令方法失效.

本文假定可获知男女两性人口的离散数据,这是符合现代人口管理的实际情形的.在这一假定下,通过样条函数拟合两性人口数据,把模型参数估计问题归结为解线性代数方程组,提出新的参数估计方法.

2 原理与方法

根据 $M(t)$, $F(t)$ 的实际意义,定义非负(且非恒零)函数 $m(t)$, $f(t)$: $m^2(t) = M(t)$, $f^2(t) = F(t)$. 于是(1)变为

$$\begin{cases} 2\mathrm{d}m/\mathrm{d}t = -Tm(t) + Uf(t) \\ 2\mathrm{d}f/\mathrm{d}t = -Vf(t) + Wm(t) \\ m(0) = \overline{C_1},\ f(0) = \overline{C_2} \end{cases} \tag{2}$$

调整记号,将问题提法重新整理如下:

已知时间 $0 \leqslant t \leqslant t_{\max}$ 内各点 $\{t_i\}_1^N$ 上的数据 m_i, f_i(它们分别是离散人口数据 $M(t_i)$, $F(t_i)$ 的算术根)要求估计模型

$$\begin{cases} \mathrm{d}m/\mathrm{d}t = -Tm(t) + Uf(t) \\ \mathrm{d}f/\mathrm{d}t = -Vf(t) + Wm(t) \qquad 0 \leqslant t \leqslant t_{\max} \\ m(0) = c_1,\quad f(0) = c_2 \end{cases} \tag{3}$$

中的部分或全部参数,使得

$$E = \sum_{i=1}^{N} \{[m(t_i) - m_i]^2 + [f(t_i) - f_i]^2\} \tag{4}$$

为极小.((3)中之 T, U, V, W 是原模型(1)中相应参数的 1/2, c_1, c_2 是(1)中 C_1, C_2 的算术根).

由(3)得 $m(t) = -T\int_0^t m(s)\mathrm{d}s + U\int_0^t f(s)\mathrm{d}s + c_1$, $f(t) = -V\int_0^t f(s)\mathrm{d}s + W\int_0^t m(s)\mathrm{d}s + c_2$. 由于 $m(s)$, $f(s)$ 的离散值已知,因此可用适当的(例如样条函数)数值积分方法求 $\int_0^t m(s)\mathrm{d}s$ 及 $\int_0^t f(s)\mathrm{d}s$. 它们在 $t = t_i$ 的值分别记为 $\overline{M_i}$, $\overline{F_i}$,式(4)成为

$$E = \sum_{i=1}^{N} [(-T\overline{M_i} + U\overline{F_i} + c_1 - m_i)^2 + (-V\overline{F_i} + W\overline{M_i} + c_2 - f_i)^2] \tag{5}$$

参数估计问题成为求待定参数使(5)中的 E 极小.这显然归结为线性代数方程组.

例如,设(3)中的 U 及 c_2 为未知参数,则由 $\partial E/\partial U = 0$, $\partial E/\partial c_2 = 0$ 得

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{N} (-T\overline{M_i} + U\overline{F_i} + c_1 - m_i)\overline{F_i} = 0 \\ \sum_{i=1}^{N} (-V\overline{F_i} + W\overline{M_i} + c_2 - f_i) = 0 \end{cases}$$

可解得

$$\begin{cases} U = [-\sum_{i=1}^{N} (-T\overline{M_i} + c_1 - m_i)\overline{F_i}] / \sum_{i=1}^{N} \overline{F_i}^2 \\ c_2 = -\sum_{i=1}^{N} (-V\overline{F_i} + W\overline{M_i} - f_i)/N \end{cases} \tag{6}$$

又例如,若 T,U,W为未知参数,则由 $\partial E/\partial T = 0$, $\partial E/\partial U = 0$及 $\partial E/\partial W = 0$得关于 T,U的线性方程组

$$\begin{pmatrix} -\sum_{i=1}^{N}\overline{M}_i^2 & \sum_{i=1}^{N}\overline{F}_i\overline{M}_i \\ -\sum_{i=1}^{N}\overline{M}_i\overline{F}_i & \sum_{i=1}^{N}\overline{F}_i^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} T \\ U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{N}\overline{M}_i(m_i - c_1) \\ \sum_{i=1}^{N}\overline{F}_i(m_i - c_1) \end{pmatrix} \tag{7}$$

及

$$W = [-\sum_{i=1}^{N}(-V\overline{F}_i + c_2 - f_i)\overline{M}_i]\sum_{i=1}^{N}\overline{M}_i^2 \tag{8}$$

3 数值例子

在模型(1)中,取 $T = 1$, $U = 0.25$, $V = 0.95$, $W = 0.2$, $C_1 = 1$, $C_2 = 1.1$.在[0, 1]的 100个等距节点 $0 = t_0 < \cdots < t_{99} = 1$上获得数据 M_i, F_i.用这些数据进行两个数值试验.

(Ⅰ) 设 T,U,V,W已知,99对数据 M_i, F_i $(i = 1,\cdots 99)$ 估计 C_1, C_2.

在此用三次样条插值(自然边界条件)拟合数据 $m_i = M_i^{1/2}$, $f_i = F_i^{1/2}$.按样条插值求积公式确定 $\int_0^t m(s)\,ds$和 $\int_0^t f(s)\,ds$在 $t = t_i$的值,由(6)式算得 c_2然后令 $C_2 = c_2^2$.类似地按 $c_1 = -\sum_{i=1}^{N}(-\overline{M}_i + U\overline{F}_i - m_i)/N$,计算 c_1,令 $C_1 = c_1^2$,结果为 $C_1 = 1.01$, $C_2 = 1.10$.

(Ⅱ) 设 C_1, C_2为已知,由数据 M_i, F_i $(i = 1,\cdots, 99)$估计 T,U,V,W.

由(7)解得 $T = 0.49$, $U = 0.12$.类似地,由

$$\begin{pmatrix} -\sum_{i=1}^{N}\overline{F}_i^2 & \sum_{i=1}^{N}\overline{M}_i\overline{F}_i \\ -\sum_{i=1}^{N}\overline{F}_i\overline{M}_i & \sum_{i=1}^{N}\overline{M}_i^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{N}\overline{F}_i(f_i - c_2) \\ \sum_{i=1}^{N}\overline{M}_i(f_i - c_2) \end{pmatrix} \tag{9}$$

解得 $V = 0.45$, $W = 0.08$ (均用选主元法求解),最后转换成模型(1)中的参数估计(注意(1)、(3)中参数的关系): $T = 0.98$, $U = 0.24$, $V = 0.90$, $W = 0.16$.

总结之,如表 1.

表 1 数值试验结果

项 目	T	U	V	W	C_1	C_2
模型值	1	0.25	0.95	0.2	1.0	1.1
计算值(Ⅰ)	设为已知				1.01	1.10
	1	0.25	0.95	0.2		
计算值(Ⅱ)	0.98	0.24	0.90	0.16	设为已知	
					1.0	1.1

误差主要来源是:① 试验模型生成试验已有数据的误差;② 数值积分误差;③ 解线性方程组的误差.显然实际应用时主要注意②,因为数据是给定的,而线性方程组仅仅是二阶的.总的看来,这一方法理论清晰,操作容易被技术人员接受与实现,数值结果也可以接受.

参 考 文 献

1 Kendall D G. Stochastic processes and population growth. J Roy Statist Soc Sec B, 1949, 11: 230 ~ 264

2 Keyfitz N. Introduction to the Mathematics of Population, with Revisions. Addison-Wesley: Reading Mass, 1977

3 Heynie S P, Kalaba R E. Fitting a nonlinear differential system to population data: the two-sex geometric-mean model. Appl Math and Computation, 1981, 9: 1 ~ 26

Linearization Method for Two-sex Population Model

Li Luoluo　Wu Cunliang[*]

Abstract　This paper deals with parameter identification of the two-sex geometric-mean population model. On the assumption of having male and female data, the authors linearize the non-linear model, and than approximate the parameters in least-saqure sense.

Keywords　population model, spline function, linearization

[*] Lingnan College, Zhongshan University, Guangzhou 510275