中山大学学报 (自然科学版)
第 36卷 增 刊 ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM Vol. 36 Suppl.
1997年 6月 UNIVERSITATIS SUNYATSENI Jun. 1997

全明确环*

姚新钦
(广州业余大学数学系，广州 510230)

摘 要 用扭论—— 当代环与代数研究的重要工具，刻画了全明确环的结构和全明确环的同态像，解决了“所有 R-模的平凡扭部分”问题. 证明了全明确环结构定理，以及全明确环上矩阵环是全明确环.

关键词 明确模，全明确环
分类号 O 153.3

探索环与代数结构的现代方法之一，就是建立在环上的扭论[1-3]. 通过它即研究环的外部特性，可以刻画环的内部特征.

本文中 R 指具有单位元的结合环，R-模指左幺模. R-$tors$ 表示由 R 上全体左正合扭论作成的集合，R-$pret$ 表示由 R 上全体左正合预扭论作成的集合.

$^{a}(M)$ 表示模 M 在 R-$tors$ 中生成的扭论[1]. $^{e}[M]$ 表示在 R-mod 中由全体 M-子生成的模组成的子类. $T^{f}=\{M\in R\text{-}mod \mid f(M)=M\}$, $F^{f}=\{M\in R\text{-}mod \mid f(M)=0\}$. $1\in R$-$tors$ 表示最大扭论，$T1=R$-mod; $0\in R$-$tors$ 表示最小扭论，$F0=R$-mod.

R-模 M 称为明确模[4,5]，如果对于每个 $f\in R$-$tors$ 均有 $f(M)=M$ 或者 $f(M)=0$.

R-模 M 称为强明确模[5]，如果对于每个 $f\in R$-$pret$ 均有 $f(M)=M$ 或者 $f(M)=0$.

定义 环 R 称为全明确环，如果每个 R-模都是明确模.

Artin局部环 A 有这样的性质[6]: $J(A)$ 是幂零理想; $A/J(A)$ 是除环. Bican[4] 等提出“环的平凡扭部份”问题: 环 R 是 (左) R-明确模的充要条件是 $J(R)$ 左 T-幂零；并且 $R/J(R)$ 是素环. 更一般地，为了解决“所有 R-模上的平凡扭部分”问题，本文得到下面的全明确环结构定理

定理 1 全明确环结构定理. 下列条件等价:

(1) R 是全明确环;

(2) 每个有限生成的 R-模都是明确模;

(3) R-$tors$ 只含有 0和 1;

(4) R 是右完备环，并且所有左 R-单模都同构;

(5) $J(R)$ 是 R 的唯一极大双边理想且左 T-幂零; $R/J(R)$ 是 Artin单环.

证明 (3)→ (1)→ (2) 显然.

* 收稿日期: 1997-03-07 姚新钦，男，34岁，讲师

(2)→ (3): 如果 $0\neq f\in R$-$tors$,可取 $0\neq M\in T^{f}$, $0\neq m\in M$.对任意 $A\in R$-mod, $a\in A$,因 $Rm\oplus Ra$ 是明确模,且 $f(Rm\oplus Ra)\neq 0$,所以 $Rm\oplus Ra\in T^{f}$, $Ra\in T^{f}$, $A\in T^{f}$. 最后 $f=1$.

(5)→(4): 这时 R 是右完备环.另外,因为每个 R-单模均可看作 $(R/J(R))$-单模,而 $R/J(R)$ 是 Artin单环,其上所有单模都同构,所以,所有 R-单模都是 $(R/J(R))$-同构的,从而也是 R-同构.

(4)→ (3): 设 $0\neq f\in R$-$tors$,则存在 R-单模 $M\in T^{f}$,所以 $a(M)\leqslant f$.但是全体 R-单模都同构,所以在 R-$pret$ 中有 $Soc^{[5]}\leqslant a(M)\leqslant f$,因此 $\overline{Soc}\leqslant f$;另一方面,因为 R 是右完备环,所以 $F_{Soc}=0$,即 $\overline{Soc}=1$,从而 $f=1$.

(3)→ (5): 首先,所有 R-单模皆同构;另外,如果 $a\in R$,由 R 的乘闭子集 $\{1=a^0, a^1, a^2,\cdots\}$ 确定的扭论

$$f_a=\begin{cases}1 & (a\text{是幂零元})\\ 0 & (a\text{不是幂零元})\end{cases}$$

取 $A=\{a\in R\mid RaR$ 是 R 的 nil-双边理想$\}$,它是 R 的最大的 nil-双边理想.如果 $r\notin A$,那么存在 $b\in RrR$ 不是幂零元,这时 $f_b=0$,但是 $R/RbR\in T_{f_b}$,所以 $R=RbR\leqslant RrR$,即 $R=RrR$, A 是 R 的唯一极大双边理想.最后,因为 $J(R)$ 包含所有 nil-理想,所以 $J(R)\geqslant A$ 即 $J(R)=A$.

注意到 $Soc\neq 0$,从而 $\overline{Soc}=1$,即所有非零的左 R-模 M 都有 $Soc(M)\neq 0$.由文 [6]定理 11.6.3, $J(R)$ 左 T-幂零.以下只需证明 $R/J(R)$ 是半单环,从而是 Artin单环.

设 $R'/J(R)$.假定 $SocR(R')\neq R'$, I' 是包含 $Soc(R')$ 的极大左理想.因为 $Soc(R')$ 是 R' 的本质左理想,因此 I' 也是.如果 S' 是 R' 的单左理想,那么由于 $J(R')=0$,存在 R' 的极大左理想 K' 使得

$$S\cap K'=0,\text{这样}, R'=S\oplus K', S\cong R'/K'(\text{作为 } R'\text{-模}).$$

另外,因为 $Sing_{R'}(R'/I')=R'/I'$,而 $Sing_{R'}(S')=0$,所以 S' 与 R'/I' 作为 R'-模,从而也作为 R-模,不同构.但它们都是 R-单模.证毕.

命题 环 R 是全明确环,当且仅当 $J(R)$ 左 T-幂零;并且 $R/J(R)$ 是 Artin单环.

这可以从定理 1的 (5)→ (4) 中看出.

推论 Artin局部环是全明确环.

域 F 上的矩阵环 $(F)n$ 是全明确环,但不是局部环.

定理 2 全明确环的同态像(剩余类环)也是全明确环.

设 R 是全明确环, $\overline{R}=R/a$ 是 R 的一个同态像,这里 a 是 R 的双边理想,由定理 1之 (5), $a\leqslant J(R)$,而 $J(\overline{R})=J(R)/a$ 是 $\overline{R}$ 的唯一极大双边理想,并且是 T-幂零的.最后, $\overline{R}/J(\overline{R})\cong R/J(R)$ 是 Artin单环.

例 定理 1中的条件 (2) 不能减弱成“每个循环左 R-模都是明确模”.

比如, $R=Q<x>$ 是域 Q 上关于 x 的形式幂级数环.它的每个理想都具有形式 (x^k), $k=0,1,2,\cdots$ 而每个循环 R-模具有形式 $R/(x^n)$ 记作 $R\bar{x}$. $R\bar{x}$ 的每个子模具有形式 $R\bar{x}^k$.

设 $f\in R$-$tors$, $C=R\bar{x}$, $f(C)\neq 0$,则 $f(C)=R\bar{x}^k$ $(0\leqslant k<n)$.但 $R\bar{x}^{n-1}\leqslant R\bar{x}^k\in T^{f}$,又因 $R\bar{x}^{k-1}/R\bar{x}^k\cong R\bar{x}^{n-1}$,所以 $R\bar{x}^{k-1}/R\bar{x}^k\in T^{f}$, 由于 T^{f} 扩张闭, $R\bar{x}^{k-1}\in T^{f}$.

对 k 作归纳,经有限步骤后,得到 $R\bar{x}\in T^{f}$ 即 $C\in T^{f}$,所以 C 是明确 R-模.但是 R 不满

足 $J(R)$ 左 T-幂零条件，因为 $J(R)=(x)\neq 0$ 而 R 是整环.

定理 3　下列条件等价：

(1) 每个 R-模都是强明确模；

(2) 每个有限生成 R-模都是强明确模；

(3) R-$pret$ 只含有 0 和 1；

(4) R 是 Artin 单环；

(5) R 是全明确环，并且 $J(R)=0$.

证明　(1)$\Leftrightarrow$(2)$\Leftrightarrow$(3) 与定理 1 类似，(5)$\Leftrightarrow$(4)$\rightarrow$(3) 较明显.

(3)$\rightarrow$(4)：设 $A\neq R$ 是 R 的双边理想，那么 $e[R/A]\neq 0$，从而 $e[R/A]=1$. 所以存在自然数 n 使得 R 嵌入 $(R/A)^{(n)}$. 当然必须 $A=0$，即 R 是单环. 但是 $0\neq Soc\in R$-$pret$，所以 $Soc=1$，即 $Soc(R)=R$.

定理 4　全明确环上的矩阵环也是全明确环

证明　环 R 的双边理想与矩阵环 $(R)n$ 的双边理想一一对应：

$$A \longrightarrow (A)n$$

如果 R 是全明确环，根据上面命题，$J((R)n)$ 也是左 T-幂零的；$(R)n/J((R)n)$ 也是 Artin 单环.

参　考　文　献

1　Jonathan S, Golan. Torsion Theories. London: Longman Scientific & Tenchnical, 1986

2　Jans J P. Some aspects of torsion. Pacific Journal of Math (Australia). 1965, 15 (4): 1249~1259

3　Joachim Lambec. Torsion theories, additive semamtics, and rings of quotients. Lecture Notes in Math. New York: Springer-Verlag, 1971. 177

4　Bican Kepka T, Nemec P. On rings with trivial torsion parts, Bull Austral Math Soc, 1973, 9 (9): 275~290

5　姚新钦，丘权昌. 明确模与强明确模. 广东教育学院学报 (自然科学版)，1996, 16 (3): 5~9

6　Kasch F, Wallace D A R. Modules and Rings. London: Academic Press, 1982

Full-Decisive Rings

*Yao Xinqin**

Abstract　Full-decisive ring is described in terms of torsion-theories, which is nowaday a powerful tool in modern algebraic researches, and solves the problem that torsion part of any R-module is trivial. The author obtains the full-decisive ring's structure theoriem and proves that remainders and matries rings over a full-decisive ring are also full-decisive.

Keywords　decisive module, full-decisive ring

* Department of Mathematics, Guangzhou Sparetime College, Guangzhou 510230