

线段自映射的拓扑熵为零的充要条件^{*}

耿 祥 义

(中山大学数学系, 广州 510275)

摘 要 设 f 是闭区间上的连续自映射, 那么 f 的拓扑熵等于零当且仅当对 f 的任意回归点是 2 的方幂型的.

关键词 拓扑熵, 回归点

分类号 O 174. 12

I 表示 $[0, 1]$ 闭区间, $C^0(I, I)$ 表示 I 到 I 的连续自映射的全体. 设 $f \in C^0(I, I)$, $x \in I$ 关于 f 的正向轨道记为 $O_f^+(x) = \{x, f(x), f^2(x), \dots, f^n(x), \dots\}$. 这个序列有什么性质, 是人们研究迭代过程时所关心的主要问题之一. f 的拓扑熵, 周期点, 回归点等概念都是为研究这一问题而引进的重要概念. $x \in I$ 称为 f 的 n -周期点, 假如 $f^n(x) = x$, 但对一切的 $1 \leq k \leq n - 1, f^k(x) \neq x$. 当 $n = 1$ 时, n -周期点就是不动点. $x \in I$ 称为 f 的回归点, 假如存在正整数序列 $\{n_i\}$, 使得序列 $\{f^{n_i}(x)\}$ 收敛到 x . 回归点是周期点的自然推广, 对于回归点 x , 存在什么样的序列 $\{n_i\}$, 能使得序列 $\{f^{n_i}(x)\}$ 收敛到 x 是人们自然关心的问题之一. 称回归点 x 是 2 的方幂型的, 假如存在正整数序列 $\{m_i\}$, 使得序列 $\{f^{2^{m_i}}(x)\}$ 收敛到 x . 下述结果是已知的^[1, 2]: $f \in C^0(I, I)$, f 的拓扑熵为零当且仅当 f 的任意周期点的周期都是 2 的方幂.

当 f 的拓扑熵为零时, f 的周期点是 2 的方幂型回归点, 本文证得下述定理 1.

定理 1 f 的拓扑熵为零当且仅当 f 的任意回归点都是 2 的方幂型的.

对于一般的紧致动力系统 (X, f) , 即 X 是紧致度量空间, f 是 X 到 X 的连续映射, f 的回归点集一定非空, 但周期点集可能是空集. 因此, 对一般的紧致系统 (X, f) , f 的拓扑熵与回归点的“回归序列”存在怎样的关系是一个值得探讨的问题.

记 $\Omega(f), \Lambda(f), R(f), P(f), h(f)$ 分别表示 f 的非游荡集, k -极限集, 回归点集, 周期点集和拓扑熵. 详细定义可参见文 [1].

1 有关引理

引理 1 $f \in C^0(I, I)$, 若存在点 $t \in I$ 及 f 的不动点 p , 使得

$$f^n(t) \leq p < t < f(t)$$

或

$$f^n(t) \geq p > t > f(t)$$

^{*} 广东省博士后科学基金 (016B083) 资助项目

收稿日期: 1996-09-16 耿祥义, 男, 34 岁, 博士, 副教授

对某 $n \geq 2$ 成立, 则存在闭区间 J_1, J_2, J_1 和 J_2 至多相交一点, 使得

$$f(J_1) \cap f(J_2) \supset J_1 \cup J_2$$

从而 $h(f) > 0$.

证明 不妨设存在点 t 及 f 的不动点 p , 使得

$$f^n(t) \leq p < t < f(t)$$

对某 $n \geq 2$ 成立.

如果 $a < b < c$ 三点满足:

$$f(a) \leq a, f(c) \leq a, f(b) \geq c$$

或

$$f(c) \geq c, f(a) \geq c, f(b) \leq a$$

则称 a, b, c 为 f 的一个“马蹄组”. 这里只须证明 f 存在马蹄组.

设 n 是满足

$$f^n(t) \leq p < t < f(t)$$

的最小正整数.

记 $C = \{x \in \{t, f(t), \dots, f^{n-1}(t)\}; p < x < f(x)\}$

则 C 是非空有限集.

设 $u = f^k(t)$, 其中 $k = \max\{j: f^j(t) \in C, 0 \leq j \leq n-1\}$. 记 $v = f(u)$, 那么一定有 $f(v) < v, f(v) \neq v$, 否则对任意 $i, f^i(t) \leq p$ 不成立).

以下分三种情况.

(1) $f(v) \leq p$, 则 $p < u < v$ 是 f 的一个马蹄组.

(2) $p < f(v) < u$, 根据 u 的取法必有 $f^2(v) \leq f(v)$

从而 $f(v) < u < v$ 是 f 的一个马蹄组.

(3) $u < f(v) < v(f(v) \neq v)$, 否则对任意 $i, f^i(t) \leq p$ 不成立).

记 $D = \{x \in \{v, f(v), f^2(v), \dots, f^{n-2}(v), f^{n-1}(t)\}; u < f(x) < x \leq v\}$

则 D 是非空有限集 (D 至少含有 v).

设 $y = f^k(v)$, 其中 $k = \max\{j: f^j(v) \in D, 0 \leq j \leq n-1\}$

记 $z = f(y)$. 那么由 u 和 y 的取法可知 $f(z) < u$. 如果 $f(z) \leq p$, 则 $p < u < z$ 为 f 的一个马蹄组. 若 $p < f(z) < u$, 那么由 u 的取法可知 $f^2(z) \leq f(z)$. 从而 $f(z) < u < z$ 为 f 的一个马蹄组.

设 $x \in I, \mathcal{O}_f(x) = \{x, f(x), \dots, f^n(x), \dots\}$ 称为关于 f 是强可分的, 如果在区间 $(x, f(x))$ 或 $(f(x), x)$ 中存在 f 的不动点 z , 使得对任意 $y \in \mathcal{O}_f(x), f(y) > z$ 当且仅当 $y < z$.

引理 2^[3] 设 $f \in C^0(I, I), h(f) = 0$, 那么对任意的 $x \in \Omega(f) - P(f)$, 及任意的自然数 $n, \mathcal{O}_f^n(x)$, 关于 f^n 是强可分的.

引理 3 设 $f \in C^0(I, I), h(f) = 0$, 那么对任意的 $x \in \Omega(f) - P(f)$, 序列 $\{f^{2^n}(x)\}$ 至多有两个极限点. 如果 $\{f^{2^n}(x)\}$ 有两个极限点 $s_1, s_2 (s_1 < s_2)$, 那么 $x \in [s_1, s_2]$.

证明 假设序列 $\{f^{2^n}(x)\}$ 存在三个极限点 $s_1, s_2, s_3 (s_1 < s_2 < s_3)$. 如果 $x = s_2$, 我们不妨假设存在 $\{m_i\}$, 使得

$$f^{2^{m_i}}(x) > x, f^{2^{m_i}}(x) \rightarrow x (i \rightarrow \infty).$$

那么存在正整数 n_0 , 使得

$$x < f^{2^{n_0}}(x) < s_3.$$

由引理 2 可知,当 $n > n_0$ 时,有 $f^{2^n}(x) < f^{2^{n_0}}(x)$. 这与 s_3 是 $\{f^{2^n}(x)\}$ 的极限点矛盾. 根据引理 2 不难得知 $x < s_2$ 和 $x > s_2$ 也不能成立. 因此 $\{f^{2^n}(x)\}$ 至多有两个极限点. 设 $s_1, s_2 (s_1 < s_2)$ 是 $\{f^{2^n}(x)\}$ 的两个极限点, 由引理 2 可知, $x \in [s_1, s_2]$.

2 定理 1 的证明

设 $f \in C^0(I, I), h(f) = 0$. 任取 $x \in R(f)$, 来证明 x 是 2 的方幂型的回归点. 根据文 [1, 2] 结果, 不妨假设 $x \in R(f) - P(f)$.

根据引理 3, 分以下两种情形.

(1) $\{f^{2^n}(x)\}$ 只有一个极限点. 设

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^{2^n}(x) = y$$

假如 $y \neq x$, 不妨设 $y < x$ ($y > x$ 时, 证明类似). 这时存在 n_0 , 使得 $n \geq n_0$ 时 $f^{2^n}(x) < x$.

根据引理 2, 对任意 $n \geq n_0$, 必有 $f^{2^n}(x) < y$, 否则与 $f^{2^n}(x) \rightarrow y$ 矛盾. 由引理 2, 有

$$f^{2^{n_0}}(x) < f^{2^{n_0+1}}(x) < f^{2^{n_0+2}}(x) < \dots < f^{2^{n_0+m-1}}(x) < f^{2^{n_0+m}}(x) < \dots < y < x$$

再由引理 2, 有

$$1) \quad f^{p \cdot 2^n}(x) < f^{2^{n+1}}(x) < y \quad (m \geq n_0, p \text{ 是任意奇数})$$

对于 $1 \leq m < n_0$, 如果 $f^{2^m}(x) < x$, 由引理 2 可知, 存在 $f^{2^m}(x)$ 的不动点 t_m , 使得对任意奇数 p 有

$$f^{p \cdot 2^m}(x) < t_m < f^{2^m}(x) < y$$

如果 $f^{p \cdot 2^m}(x) > x$, 那么存在 $f^{p \cdot 2^m}(x)$ 的不动点 $s_m, s_m > x$, 使得对任意奇数 p 有

$$x < s_m < f^{p \cdot 2^m}(x)$$

从而存在 $s_0, s_0 > x$, 使得对任意奇数 p 和 $1 \leq m < n_0$, 有

$$2) \quad x < s_0 < f^{p \cdot 2^m}(x) \text{ 或 } f^{p \cdot 2^m}(x) < y < x$$

由 1), 2) 式可知, 存在 $W > 0$, 使得对任意偶数 q , 有

$$3) \quad |f^q(x) - x| > W$$

因为 $x \in R(f) - P(f)$, 由引理 2 可知, 存在偶数序列 $\{m_i\}$, 使得

$$\lim_{i \rightarrow \infty} f^{m_i}(x) = x$$

这与 3) 式矛盾. 故必有 $y = x$.

(2) $\{f^{2^n}(x)\}$ 有两个极限点 $s_1, s_2 (s_1 < s_2)$. 由引理 3, 有 $x \in [s_1, s_2]$ 假如 $x \neq s_1, s_2$, 由于 ${}^{[1]} \overline{P(f)} = \overline{R(f)}$ 故存在充分接近 x 的周期点 p , 设其周期为 2^m . 如果 $x < p$, 那么存在 $n_2 > n_1 > m$, 使得

$$f^{2^{n_1}}(x) < x < p < f^{2^{n_2}}(x)$$

如果 $x > p$, 那么存在 $m_2 > m_1 > m$, 使得

$$f^{2^{m_2}}(x) < p < x < f^{2^{m_1}}(x)$$

由引理 1 可知, $h(f) > 0$, 与 $h(f) = 0$ 矛盾. 故必有 $x = s_1$ 或 $x = s_2$.

由文 [1, 2] 可知充分性成立.

注 1 设 $f \in C^0(I, I)$, $h(f) = 0$, $x \in R(f) - P(f)$. 由定理 1, 不妨假定存在序列

$$m_1 < m_2 < \cdots < m_i < \cdots$$

使得

$$f^{2^{m_1}}(x) < f^{2^{m_2}}(x) < \cdots < f^{2^{m_i}}(x) < \cdots < x$$

并且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^{2^{m_i}}(x) = x$$

对每个 m_i , 存在 k , 使得 $m_i + 1 = m_i + k$, 由引理 2, 对任意奇数 p , 有.

$$f^{2^{m_i}}(x) < f^{2^k p 2^{m_i}}(x) = f^{p 2^{m_i+1}}(x) < x$$

从而, 对任意奇数 p , 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^{p 2^{m_i}}(x) = x$$

注 2 设 $f \in C^0(I, I)$, 则^[4] f 是非混沌的 (Li - Yorke 意义下) 当且仅当对任意 $x \in \Lambda(f)$, 序列 $\{f^{2^n}(x)\}$ 收敛到 x .

参 考 文 献

- 1 Block L S, Coppl W A. Dynamics in one dimension. Berlin Springer-Verlag. 1992, 1342-208-218.
- 2 周作领. 小熵猜测的一个证明. 中国科学 (A), 1985, 15(10): 881-889
- 3 Liao Gongfu. Chain recurrent orbits of mapping of the interval. Northeastern Math J, 1986, 2(2): 224-240
- 4 Liao Gongfu. ω -limit Sets and chaos for maps of the interval. Northeastern Math J, 1990, 6(2): 127-135

Necessary and Sufficient Condition for Topological Entropy of Maps of the Interval to be Zero

Geng Xiangyi*

Abstract Let f denote a continuous map of a compact interval to itself. It is shown that f has zero topological entropy if and only if each recurrent point of f is square power type of two.

Keywords topological entropy, recurrent point

* Department of Mathematics, Zhongshan University, Guangzhou, 510275