第37卷 第2期　　中山大学学报 (自然科学版)　　Vol. 37 No. 2
1998年 3月　　ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM UNIVERSITATIS SUNYATSENI　　Mar. 1998

包含区间边界上的奇异值*

黎 罗 罗
(中山大学科学计算与计算机应用系，广州 510275)

摘　要　引入“双向 SC性质”的概念; 对于具有双向 SC性质的矩阵 A, 论证了以下事实: 若 A的奇异值 σ位于 Gerschgorin型包含区间的边界上,则 σ必位于每一个 Gerschgorin型区间的端点上.

关键词　奇异值, SC性质, 边界
分类号　O 151.21

设 $A=(a_{ij})$为 n阶复矩阵.对 $i=1,2,\cdots,n$定义

$$r_i=\sum_{j\neq i}|a_{ij}|,\qquad c_i=\sum_{j\neq i}|a_{ji}|$$

已有如下 Gerschgorin圆盘定理.

引理 1[1]　A的所有特征值都属于复平面上 n个圆盘: $G_i=\{z\in \mathbf{C}\mid |z-a_{ii}|\leqslant r_i\}$ $(i=1,2,\cdots,n)$的并集 $G(A)=\bigcup_{i=1}^{n}G_i$.

此外还有 Ostrowski, Brauer, Brualdi的一系列研究特征值包含区域的定理.对这些定理进一步探讨时,人们对恰位于包含区域上的特征值十分关注.例如有

引理 2[1]　设 A具有性质 SC.若 A的特征值 λ在 $G(A)$的边界上,则 λ必是每个圆盘 G_i的边界点.

A具有 SC性质是指: 对任一对指标 p,q $(1\leqslant p\neq q\leqslant n)$均存在 m个互异指标 $p=k_1,k_2,\cdots,k_m=q$使得 $a_{k_ik_{i+1}}\neq 0$ $(i=1,2,\cdots,m-1)$.引理 2的证明过程其实还进一步表明: 所论条件下,若 λ不是任一圆盘的内点,则它必同时是每个圆盘的边界点.

关于方阵 A的奇异值,有如下 Gerschgorin型包含区间定理.

引理 3[2]　设 $s_i=\max(r_i,c_i)$, $a_i=|a_{ii}|$, $u_+=\max(o,u)$,则 A的任一奇异值必属于下述 Gerschgorin型区间 (简称 G型区间) $Q_j=[(a_j-s_j)_+,a_i+s_j]$的并集 $Q(A)=\bigcup_{j=1}^{n}Q_j$.

由应用上及理论上完整性的需要,本文就位于 $Q(A)$边界上的奇异值,导出与引理 2相仿的结论.

首先引入新概念: 设 $A=(a_{ij})$为 n阶复矩阵,若对任意指标 p,q $(1\leqslant p\neq q\leqslant n)$存在 m个互异指标 $p=k_1,k_2,\cdots,k_m=q$,使得 $a_{k_ik_{i+1}}\cdot a_{k_{i+1}k_i}\neq 0$ $(i=1,2,\cdots,m-1)$,则称 A具有双向 SC性质.本文的主要结果为以下定理 1.

定理 1　设 $A=(a_{ij})$为 n阶复矩阵,具有双向 SC性质,若 A的非零奇异值 $\sigma>0$,不是

* 收稿日期: 1997-06-27　　黎罗罗, 男, 52岁, 副教授

任一 G型区间的内点,则 e必同时是每个 G型区间的边界点.

为证明定理 1,先证明下面的引理 4.若 e是 $\boldsymbol{A}$的奇异值,则存在 2个非零向量 $x = (x_1, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$ 及 $y = (y_1, \cdots, y_n)^{\mathrm{T}}$ 使得

$$e x = \boldsymbol{A}^* y, \quad e y = \boldsymbol{A} x \tag{1}$$

记 $z_i = \max(|x_i|, |y_i|)$,又设指标 p 使得 $z_p = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n}\{z_i\}$.

引理 4 设 $e > 0$是 $\boldsymbol{A}$奇异值,且 e不是任一 G型区间 Q_i 的内点;p 如上所述.则

1) e必是区间 Q_p 的边界点;

2) 若 $a_{pj} \neq 0$且 $a_{jp} \neq 0$,则 $z_j = z_p$,即 z_j 也取得最大值 $\max\limits_i\{z_i\}$.

证明 在(1)中取第 p 式

$$\begin{aligned} e x_p - \overline{a_{pp}} y_p &= \sum_{j \neq p} \overline{a_{jp}} y_j \\ e y_p - a_{pp} x_p &= \sum_{j \neq p} a_{pj} x_j \end{aligned} \tag{2}$$

不妨设 $z_p = |y_p| \geqslant |x_p|$ ($z_p = |x_p| \geqslant |y_p|$时证法相仿),显然 $z_p > 0$(否则 x, y 为零向量),记 $Z = x_p / y_p$ 由(2)式有

$$\begin{aligned} |Ze - \overline{a_{pp}}| z_p &\leqslant \sum_{j \neq p} |a_{jp}| z_j \leqslant z_p \sum_{j \neq p} |a_{jp}| = z_p c_p \\ |e - Z a_{pp}| z_p &\leqslant \sum_{j \neq p} |a_{pj}| z_j \leqslant z_p \sum_{j \neq p} |a_{pj}| = z_p r_p \end{aligned} \tag{3}$$

由复数的性质及$|Z| \leqslant 1$知

$$|e - a_p| \leqslant ||Z| e - a_p| \leqslant |Ze - \overline{a_{pp}}| \qquad (e \leqslant a_p)$$

$$|e - a_p| \leqslant |e - |Z| a_p| \leqslant |e - Z a_{pp}| \qquad (e \geqslant a_p)$$

于是无论如何由(3)式知$|e - a_p| \leqslant s_p$.另方面由设 e不是 Q_p 的内点:$|e - a_p| \geqslant s_p$.所以知$|e - a_p| = s_p$.计及 $e > 0$知 e在 $Q_p = [(a_p - s_p)_+, a_p + s_p]$的边界上,此为结论 1).

其次,由上述过程知若 $e \leqslant a_p$ 则

$$|e - a_p| z_p \leqslant \sum_{j \neq p} |a_{jp}| z_j \leqslant z_p \sum_{j \neq p} |a_{jp}| \leqslant z_p s_p$$

因为$|e - a_p| = s_p$,故上式之第 2个不等式实际上是等式,于是

$$\sum_{j \neq p} |a_{jp}| (z_p - z_j) = 0$$

易知当 $a_{jp} \neq 0$时有 $z_j = z_p$.类似地若 $e \geqslant a_p$ 则可知 $a_{pj} \neq 0$时有 $z_j = z_p$,因此无论如何结论 2)成立.

定理 1的证明 记号见引理 4.设 q为任一指标.若 $q = p$则由引理 4之 1),e是 Q_p 即 Q_q 的边界点.若 $q \neq p$,由双向 SC性质,存在 m 个互异指标 $p = k_1, k_2, \cdots, k_m = q$,使得 $a_{k_i k_{i+1}} \cdot a_{k_{i+1} k_i} \neq 0$($(i = 1, 2, \cdots, m-1)$.将引理 4用于 $i = 1$的情形知 e是 Q_p 的边界点且 $z_{k_2} = z_p$;引理 4用于 $i = 2$的情形知 e是 Q_{k_2} 的边界点且 $z_{k_3} = z_{k_2} = z_p, \cdots$,依此类推知 e是 Q_q 的边界点,由 q的任意性知:e是每个 G型区间的边界点.

推论 1 若 $\boldsymbol{A}$的非对角元均不为零;$e > 0$是 $\boldsymbol{A}$的奇异值且 e不是任一 G型区间的内点,则 e必同时是每个 G型区间的边界点.

应用例子 简单的例子如 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$,由引理 3知 $\boldsymbol{A}$的奇异值必属于 G型区间的并

集 [1,5]∪ [8,12].但引理 3没有表明奇异值能否取得边值值 1, 5, 8或 12.本文定理 1给出明确的否定回答.事实上,这 4个数中的任一个,例如 12,不是每个 G型区间的内点,但又不同时是 2个 G型区间的边界点.因此 1, 5, 8或 12都不是 A的奇异值.

参 考 文 献

1 Horn R A, Johnson C R. Matrix Analysis. London: Cambridge University Press, 1985. 344~356

2 Qi L Q. Some simple estimates for singular values of a matrix. Linear Algebra Appl, 1985, 56: 105~ 119

On Marginal Singular Values on Gerschgorin-Type Intervals

Li Luoluo[*]

Abstract The concept of double SC property is introduced. Let A be a matrix possessing this property. The author proves that if a non-zero singular value of A is located on the boundary of the union of G-type inclusion intervals then it must be located at the boundary of each G-type inclusion interval.

Keywords singular value, SC property, margin

[*] Department of Scientific Computing and Computer Application, Zhongshan University, Guangzhou 510275, China