

# 一类发散级数部分和的精确化不等式<sup>\*</sup>

朱匀华

(中山大学数学系, 广州 510275)

杨必成

(广东教育学院数学系)

**摘要** 运用 Euler 求和公式的改进的不等式形式, 对于一类离散和  $\sum_{k=l}^n f(k)$  (尤其发散级数的部分和) 导出带有 1 个常数且联系 Bernoulli 数的精确化不等式, 并由此改进了若干渐近公式和经典不等式.

**关键词** Euler 求和公式, Bernoulli 数, 渐近公式

**分类号** O 178

在离散和的估计中, 发散级数部分和的估计较难而又引人关注<sup>[1]</sup>. 本文吸收了一些经典著作<sup>[2,3]</sup>的思想方法, 在适当条件下对离散和  $\sum_{k=l}^n f(k)$  导出带有 1 个常数且联系 Bernoulli 数的不等式, 并运用它对一类发散级数部分和进行精确化估算. 对于某些离散和, 一些文献只得到联系阶的渐近公式<sup>[4,5]</sup>. 本文对一类这样的离散和, 尤其发散级数的部分和, 定量地给出带有常数的精确化不等式表示. 由此改进若干渐近公式和经典不等式. 为此需运用如下的 Euler 求和公式的改进的不等式形式<sup>[6]</sup>.

设函数  $f(x)$  在区间  $[m, n]$  上存在  $2q+2$  阶导数, 这里  $m, n, q$  都取正整数 (下同), 则当  $f^{(2q)}(x)$  与  $f^{(2q+2)}(x)$  都非负时, 有

$$(-1)^{q-1} e_q(m, n) \leqslant (-1)^{q-1} \left[ \sum_{k=m}^n f(k) - \int_m^n f(x) dx \right] \leqslant (-1)^{q-1} e_{q+1}(m, n) \quad (1)$$

$$e_q(m, n) = \frac{f(m)+f(n)}{2} + \sum_{k=1}^{q-1} \frac{B_{2k}}{(2k)!} [f^{(2k-1)}(n) - f^{(2k-1)}(m)] \quad (2)$$

其中,  $B_{2k}$  为 Bernoulli 数:  $B_2 = 1/6, B_4 = -1/30, \dots$ , 满足  $(-1)^{k-1} B_{2k} > 0$ . 当  $f^{(2q)}(x)$  与  $f^{(2q+2)}(x)$  都非正时, (1) 式的反向不等式成立.

## 1 2个引理

**引理 1** 设  $l$  为正整数,  $f(x)$  在  $[l, \infty)$  上存在  $2q+2$  阶导数, 且  $f^{(2q)}(x)$  与  $f^{(2q+2)}(x)$  都非负 (正),  $f^{(2q-1)}(\infty) = 0$ , 又对于  $n \geqslant l$  设

$$a_n = \sum_{k=l}^n f(k) - \int_l^n f(x) dx - \frac{1}{2} f(n) - \sum_{k=1}^{q-1} \frac{B_{2k}}{(2k)!} f^{(2k-1)}(n) \quad (3)$$

则数列  $\{a_n\}$  收敛, 且当  $f^{(2q)}(x)$  与  $f^{(2q+2)}(x)$  都非负时, 有

\* 收稿日期: 1997-10-17 朱匀华, 男, 58岁, 教授

$$\leq (-1)^{q-1} (A - a_n) \leq (-1)^q B_{2q} / (2q)! f^{(2q-1)}(n) \quad (n \geq l) \tag{4}$$

其中, 常数  $A = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ . 又当  $f^{(2q)}(x)$  与  $f^{(2q-2)}(x)$  都非正时, 有

$$(-1)^q B_{2q} / (2q)! f^{(2q-1)}(n) \leq (-1)^{q-1} (A - a_n) \leq 0 \quad (n \geq l) \tag{5}$$

证明 设  $n > m \geq l$ , 则当  $f^{(2q)}(x)$  与  $f^{(2q-2)}(x)$  都非负时, 由 (1) 式得

$$\leq (-1)^{q-1} \left[ \sum_{k=m}^n f(k) - \int_m^n f(x) dx - e_q(m, n) \right] \leq (-1)^{q-1} [e_{q-1}(m, n) - e_q(m, n)]$$

又根据 (2) 和 (3) 式, 上式可改写为

$$\leq (-1)^{q-1} (a_n - a_m) \leq (-1)^{q-1} B_{2q} / (2q)! [f^{(2q-1)}(n) - f^{(2q-1)}(m)] \tag{6}$$

于是由  $f^{(2q-1)}(\infty) = 0$  和柯西收敛准则可推知  $\{a_n\}$  收敛. 再在 (6) 式中固定  $m$ , 令  $n \rightarrow \infty$ , 便可导出 (4) 式. 当  $f^{(2q)}(x)$  与  $f^{(2q-2)}(x)$  都非正时, 对  $[-f(x)]$  运用已证的结论, 即可导出 (5) 式.

注 1 在引理 1 条件下, 若取  $q = 1$  (这时  $f'(\infty) = 0$ ), 则当  $f''(x) \geq 0, f^{(4)}(x) \geq 0$  时, 由 (3) 与 (4) 式可得

$$\leq A - \sum_{k=l}^n f(k) + \int_l^n f(x) dx + \frac{1}{2} f(n) \leq -\frac{1}{12} f'(n) \quad (n \geq l) \tag{7}$$

其中 
$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \sum_{k=l}^n f(k) - \int_l^n f(x) dx - \frac{1}{2} f(n) \right] \tag{8}$$

当  $f''(x) \leq 0, f^{(4)}(x) \leq 0$  时, (7) 式的反向不等式成立. 若取  $q = 2$  (这时  $f'''(\infty) = 0$ ), 则当  $f^{(4)}(x) \geq 0, f^{(6)}(x) \geq 0$  时, 由 (3) 与 (4) 式可得

$$\leq \sum_{k=l}^n f(k) - A - \int_l^n f(x) dx - \frac{1}{2} f(n) - \frac{1}{12} f'(n) \leq -\frac{1}{720} f'''(n) \quad (n \geq l) \tag{9}$$

其中 
$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \sum_{k=l}^n f(k) - \int_l^n f(x) dx - \frac{1}{2} f(n) - \frac{1}{12} f'(n) \right] \tag{10}$$

当  $f^{(4)}(x) \leq 0, f^{(6)}(x) \leq 0$  时, (9) 式的反向不等式成立.

引理 2 在引理 1 条件下, 存在  $\xi \in [0, 1]$ , 使

$$\sum_{k=l}^n f(k) = A + \int_l^n f(x) dx + \frac{1}{2} f(n) + \sum_{k=1}^{q-1} \frac{B_{2k}}{(2k)!} f^{(2k-1)}(n) + \frac{\xi B_{2q}}{(2q)!} f^{(2q-1)}(n) \tag{11}$$

其中 
$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \sum_{k=l}^n f(k) - \int_l^n f(x) dx - \frac{1}{2} f(n) - \sum_{k=1}^{q-1} \frac{B_{2k}}{(2k)!} f^{(2k-1)}(n) \right] \tag{12}$$

证明 因这时 (4) 和 (5) 式成立, 故存在  $\xi \in [0, 1]$ , 使  $(-1)^{q-1} (A - a_n) = (-1)^q \xi B_{2q} / (2q)! f^{(2q-1)}(n)$ . 再由 (3) 式即可推出 (11) 和 (12) 式.

## 2 定理及推论

定理 1 设  $\tau \geq 0$ , 则当  $\tau \neq 1$  时, 有

$$\frac{1}{2n \ln^{\tau+1} n} \left[ 1 - \frac{1}{6n} \right] < \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln^{\tau+1} k} - \frac{\ln^{1-\tau} n}{1-\tau} - C \leq \frac{1}{2n \ln^{\tau+1} n} \quad (n \geq 3) \tag{13}$$

其中,  $C = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln^{\tau+1} k} - \frac{\ln^{1-\tau} n}{1-\tau} \right]$ ; 当  $\tau = 1$  时, 有

$$\frac{1}{(2n+1) \ln n} < \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln k} - \ln \ln n - C_1 < \frac{1}{(2n+1/3) \ln n} \quad (n \geq 2) \tag{14}$$

其中,  $C_1 = 0.794\ 678\ 645\ 4$ .

证明 设  $f(x) = 1/(x \ln^T x)$ , 则易验算在  $[2, \infty)$  上  $f''(x)$ ,  $f^{(4)}(x)$ ,  $f^{(6)}(x)$  均取正值, 且  $f'(\infty) = f'''(\infty) = 0$ , 故当  $T \neq 1$  时把  $f(x)$  代入 (7) 和 (8) 式可得

$$\leq A^T - \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln^T k} + \frac{\ln^{1-T} n}{1-T} - \frac{\ln^{1-T} 2}{1-T} + \frac{1}{2n \ln^T n} \leq \frac{1}{12n^2} \left( \frac{1}{\ln^T n} + \frac{T}{\ln^{T+1} n} \right) \quad (n \geq 2) \quad (15)$$

其中,  $A^T = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln^T k} - \frac{\ln^{1-T} n}{1-T} \right] + \frac{\ln^{1-T} 2}{1-T}$ . 把此式的极限记为  $C^T$ , 再将此式代入 (15) 式可得

$$\frac{1}{2n \ln^T n} - \frac{1}{12n^2} \left( \frac{1}{\ln^T n} + \frac{T}{\ln^{T+1} n} \right) \leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln^T k} - \frac{\ln^{1-T} n}{1-T} - C^T \leq \frac{1}{2n \ln^T n} \quad (n \geq 2) \quad (16)$$

因为当  $n \geq 3$  时,  $\ln^{T+1} n \geq \ln^T n$ , 从而由上式可推知 (13) 式成立. 又当  $T = 1$  时, 把  $f(x)$  代入 (9) 和 (10) 式可得

$$\leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln k} - A - \ln \ln n + \ln \ln 2 - \frac{1}{2n \ln n} + \frac{1}{12n^2} \left( \frac{1}{\ln n} + \frac{1}{\ln^2 n} \right) \leq \frac{1}{720n^4} \left( \frac{6}{\ln n} + \frac{11}{\ln^2 n} + \frac{12}{\ln^3 n} + \frac{6}{\ln^4 n} \right) \quad (17)$$

其中,  $A = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln k} - \ln \ln n \right] + \ln \ln 2$ . 把此式的极限记为  $C_1$ , 再将此式代入 (17) 式可得

$$\frac{\Delta_1}{\ln n} \leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln k} - \ln \ln n - C_1 \leq \frac{\Delta_2}{\ln n} \quad (18)$$

其中,  $\Delta_1 = 1/(2n) - 1/(12n^2) - 1/(12n^2 \ln n)$ ,  $\Delta_2 = \Delta_1 + (6 + 11/(\ln n) + 12/(\ln^2 n) + 6/(\ln^3 n)) / (720n^4)$ . 由于当  $n \geq 3$  时  $\ln n > 1$ , 所以  $\Delta_1(n + 1/2) > 1/2$ ,  $\Delta_2(n + 1/6) < (\Delta_1 + 7/(144n^4))(n + 1/6) < 1/2$ . 从而由 (18) 式可知当  $n \geq 3$  时 (14) 式成立. 又在 (18) 式中令  $n = 100$ , 用计算机算出  $C_1$  满足:  $0.794\ 678\ 645\ 4 < C_1 < 0.794\ 678\ 645\ 5$ . 即  $C_1 = 0.794\ 678\ 645\ 4$ . 从而当  $n = 2$  时, 直接验证可知 (14) 式也成立.

评注 1 (13) 和 (14) 式是新建立的精致不等式, 尤其 (14) 式较为简洁, 它比起只给出定性表示的联系阶的渐近公式<sup>[4,7]</sup>  $\sum_{k=2}^n 1/(k \ln k) = \ln \ln n + C_1 + o(1/(n \ln n))$  来说, 是对  $O(1/(n \ln n))$  定量地给出了精确化不等式表示. 对于固定的  $T \neq 1$ , 可运用 (16) 式对  $C^T$  精确估值.

定理 2 对任意正整数  $n \geq 3$ , 有

$$\frac{\ln n}{2n + 1/3} < \sum_{k=2}^n \frac{\ln k}{k} - \frac{1}{2} \ln^2 n - C < \frac{\ln n}{2n} \quad (19)$$

其中,  $C = -0.072\ 815\ 845$ .

证明 设  $f(x) = \ln x / x$ , 则在  $[1/2, \infty)$  上有  $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} \left( \ln x - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right)$ , 从而有  $f'''(\infty) = 0$ , 且  $f^{(4)}(x) > 0$ ,  $f^{(6)}(x) > 0$ . 所以由 (9) 和 (10) 式得

$$\leq \sum_{k=2}^n \frac{\ln k}{k} - A - \frac{1}{2} \ln^2 n + \frac{1}{2} \ln^2 1/2 - \frac{\ln n}{2n} + \frac{\ln n - 1}{12n^2} \leq \frac{6 \ln n - 11}{720n^4} \quad (n \geq 12) \quad (20)$$

其中,  $A = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \sum_{k=2}^n \frac{\ln k}{k} - \frac{1}{2} \ln^2 n \right] + \frac{1}{2} \ln^2 1/2 - \sum_{k=2}^{11} \frac{\ln k}{k}$ . 把此式的极限记为  $C$ , 并把此式代入 (20) 式可得

$$\Delta_1 \ln n \leq \sum_{k=2}^n \frac{\ln k}{k} - \frac{1}{2} \ln^2 n - \leq \frac{\ln n}{2n} - \Delta_2 \tag{21}$$

其中,  $\Delta_1 = 1/(2n) - 1/(12n^2) + 1/(12n^2 \ln n)$ ,  $\Delta_2 = (\ln n - 1)/(12n^2) - (6 \ln n - 11)/(720n^4)$ . 由于当  $n \geq 12$  时,  $\ln n > 2$ , 所以  $\Delta_1(n+1/6) > 1/2$ ,  $\Delta_2 > 0$ , 从而由 (21) 式可知当  $n \geq 12$  时 (19) 式正确. 又在 (21) 式中令  $n = 100$ , 用计算机算出  $C = -0.072815845$ . 从而当  $n \leq 11$  时, 直接验证可知 (19) 式也正确.

评注 2 (19) 式比起渐近公式  $\sum_{k=2}^n \frac{\ln k}{k} = \frac{1}{2} \ln^2 n + C + O\left(\frac{\ln n}{n}\right)$  有完全类似评注 1 的解释.

定理 3 设  $T$  为实数, 且不是非负整数, 则当  $T - 1$  且  $2q > T - 1$  时, 存在  $X \in [0, 1]$ , 使

$$\sum_{k=1}^n k^T = g_T + \frac{n^{T+1}}{T+1} + \frac{n^T}{2} + \sum_{k=1}^{q-1} \frac{B_{2k}}{2k} \begin{pmatrix} T \\ 2k-1 \end{pmatrix} n^{T-2k+1} + \frac{X B_{2q}}{2q} \begin{pmatrix} T \\ 2q-1 \end{pmatrix} n^{T-2q+1} \tag{22}$$

其中 
$$g_T = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \sum_{k=1}^n k^T - \frac{n^{T+1}}{T+1} - \frac{n^T}{2} - \sum_{k=1}^{q-1} \frac{B_{2k}}{2k} \begin{pmatrix} T \\ 2k-1 \end{pmatrix} n^{T-2k+1} \right] \tag{23}$$

证明 设  $f(x) = x^T$ , 则当  $2q > T - 1$  时, 根据文 [6] 的引理 5 和 6,  $f^{(2q)}(x)$  和  $f^{(2q-2)}(x)$  在  $[1, \infty)$  都非负或都非正. 又因这时  $f^{(2q-1)}(\infty) = 0$ , 所以根据引理 2 即知存在  $X \in [0, 1]$ , 使  $\sum_{k=1}^n k^T = A_T + \frac{n^{T+1}}{T+1} + \frac{n^T}{2} + \sum_{k=1}^{q-1} \frac{B_{2k}}{2k} \begin{pmatrix} T \\ 2k-1 \end{pmatrix} n^{T-2k+1} + \frac{X B_{2q}}{2q} \begin{pmatrix} T \\ 2q-1 \end{pmatrix} n^{T-2q+1}$ , 其中,  $A_T = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \sum_{k=1}^n k^T - \frac{n^{T+1}}{T+1} - \frac{n^T}{2} - \sum_{k=1}^{q-1} \frac{B_{2k}}{2k} \begin{pmatrix} T \\ 2k-1 \end{pmatrix} n^{T-2k+1} \right] + \frac{1}{T+1}$ . 记  $g_T = A_T - 1/(T+1)$ , 则由此二式得出 (22) 式和 (23) 式.

评注 3 (22) 式是幂和  $\sum_{k=1}^n k^T (T-1)$  的精确化不等式, 它是联系阶的渐近公式 [5]

$$\sum_{k=1}^n k^T = g_T + \frac{n^{T+1}}{T+1} + \sum_{k=1}^q \frac{(-1)^k}{k} \begin{pmatrix} T \\ k-1 \end{pmatrix} B_k n^{T-k+1} + O\left(\frac{1}{n^{T-1}}\right) \quad (q > T - 1)$$

的精确化.

注 2 当  $T$  为非负整数时, 已有  $\sum_{k=1}^n k^T$  的恒等式 [5], 这时估值只是平凡情况. 当  $T - 1$

时,  $\sum_{k=1}^n k^T$  的精确化不等式已由文 [8] 解决.

推论 对任意正整数  $n$ , 有

$$\frac{79}{1920} - \frac{1}{n} < \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \frac{4n+3}{6} \frac{1}{n} - C < \frac{80}{1920} - \frac{1}{n} \tag{24}$$

其中,  $C = -0.2078862249$ .

证明 在 (22) 式中取  $T = 1/2$ ,  $q = 2$ , 又改记常数  $g_T$  为  $C$ , 并注意  $0 \leq X \leq 1$ , 可推出

$$\frac{1}{24} - \frac{1}{n} - \frac{1}{1920n^2} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \frac{4n+3}{6} \frac{1}{n} - C \leq \frac{1}{24} - \frac{1}{n} \tag{25}$$

令  $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \frac{4n+3}{6} \frac{1}{n} - \frac{1}{24}$ ,  $b_n = a_n + \frac{1}{1920n^2} - \frac{1}{n}$ . 则 (25) 式等价于  $a_n \leq C \leq b_n$ . 且  $C$  是数列  $\{a_n\}$  与  $\{b_n\}$  的极限, 再用初等比较方法可推知  $\{a_n\}$  与  $\{b_n\}$  分别严格递增与严格递减, 故  $a_n < C < b_n$ , 即 (25) 式的严格不等号成立. 又注意  $1/920n^2 - 1/n \geq 1/920n$ , 即可推出 (24) 式. 再在 (25) 式中令  $n = 1000$ , 用计算机算出  $C = -0.2078862249$

评注 4 (24) 式不仅优于不等式<sup>[7]</sup>  $\frac{2n}{3} \overline{n} < \sum_{k=1}^n \overline{k} < \frac{4n+3}{6} \overline{n}$ , 而且当  $n > 1$  时优于此不等式的一个改进形式<sup>[7]</sup>

$$\frac{2n+1}{3} \overline{n} \leq \sum_{k=1}^n \overline{k} \leq \frac{4n+3}{6} \overline{n} - \frac{1}{6}$$

甚至当  $n > 1$  时优于精致的不等式<sup>[6]</sup>

$$\frac{4n+3}{6} \overline{n} - \frac{5}{24} < \sum_{k=1}^n \overline{k} \leq \frac{4n+3}{6} \overline{k} - \frac{4}{24}$$

$$\left( \frac{2n^2}{3} + \frac{n}{2} + \frac{1}{24} \right) \frac{1}{n} - \frac{400}{1920} \leq \sum_{k=1}^n \overline{k} < \left( \frac{2n^2}{3} + \frac{n}{2} + \frac{1}{24} \right) \frac{1}{n} - \frac{399}{1920}$$

由此可看出运用本文的方法建立一类发散级数部分和的不等式的优越性.

## 参 考 文 献

- 1 Boas R P. Growth of partial sums of divergent series. *Mathematics of computation*, 1977, 137 (31): 257~ 264
- 2 Hardy G H, Littlewood J E, Polya G. *Inequalities*. London: Cambridge University Press, 1934. 1
- 3 Mitinovic D S. *Analytic inequalities*. New York: Springer-Verlag, 1970. 1
- 4 华罗庚. *数论导引*. 北京: 科学出版社, 1957. 103
- 5 杨必成. 联系 Bernoulli 数的自然数同次幂和的公式. *数学的实践与认识*, 1994, (4): 52~ 56
- 6 朱匀华, 杨必成. Euler 求和公式的改进与幂和的不等式. *中山大学学报 (自然科学版)*, 1997, 36 (4): 22~ 27
- 7 匡继昌. *常用不等式*. 第 2 版. 长沙: 湖南教育出版社, 1993. 71~ 84
- 8 杨必成, 王根强. 关于调和级数的一些不等式. *数学研究*, 1996, (3): 1~ 8

## Accurate Inequalities of Partial Sums on a Type of Divergent Series

Zhu Yunhua\* Yang Bicheng

**Abstract** By using the improved inequality of Euler's summation formula, some accurate inequalities of discrete sums  $\sum_{k=1}^n f(k)$  (especially partial sums of divergent series), each with a constant and in relation to Bernoulli's numbers, are built. Some asymptotic formulas and classical inequalities are refined.

**Keywords** Euler's summation formula, Bernoulli's numbers, asymptotic formula

\* Department of Mathematics, Zhongshan University, Guangzhou 510275, China