

# 用积分方程法构造惯性流形<sup>\*</sup>

陈 显 强

(中山大学数学系, 广州 510275)

**摘 要** 用积分方程法为一类无穷维非线性动力系统建立惯性流形, 所得结果改进了关于惯性流形存在的有关定理.

**关键词** 惯性流形, 谱间隙条件, 积分方程法

**分类号** O 175. 15

自文 [1, 2] 提出惯性流形的概念以来, 惯性流形已成为无穷维动力系统长时间行为研究中的主要概念. 在建立惯性流形过程中, 文 [1, 2] 及以后的大量文献主要用到系统的不变锥性质及挤压性, 而为保证惯性流形的存在, 算子  $A$  具有充分大的谱间隙条件起着关键性的作用. 文 [3] 讨论了由非线性积分方程定义的连续半流的具有指数吸引性的光滑不变流形, 方法主要是用积分方程有关的性质, 并称这套方法为积分方程法. 本文在  $A$  为自共轭的情况下<sup>[1, 2, 4, 5]</sup>, 用积分方程法为带有非线性项  $F: D(A^V) \rightarrow H$  的无穷维动力系统  $du/dt + Au = F(u)$  在状态空间  $X = D(A^V)$  中建立惯性流形. 所得结果除掉了文 [3] 中对“ $F$  整体有界即  $\sup_{u \in X} |F(u)| < +\infty$ ”的要求, 得到更弱些的谱间隙条件和指数吸引的更完整描述. 与文 [1, 2, 5] 对比, 所用方法更简明直接, 且关于惯性流形的结构及指数吸引性有更深入的刻画; 与文 [4] 对比, 表明除掉“系统存在平衡点”的条件后仍保证惯性流形的存在性.

## 1 基本假设和有关概念

设  $H$  是可分 Hilbert 空间, 它的范数和内积分别记作  $|\cdot|$  和  $(\cdot, \cdot)$ .  $A: D(A) \rightarrow H$ ,  $D(A) \subset H$  是  $H$  上的自共轭正定无界闭稠定线性算子, 且  $A$  有紧的预解式. 因此  $A$  具有离散的纯点谱  $\{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty}$ , 并不妨设按重数和递增次序排列为  $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots, \lambda_n \rightarrow +\infty$ , 以及对应特征向量  $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$  构成  $H$  的完备标准正交基.

对  $0 < V < 1$ , 记  $X = (D(A^V), |u|_V)$ , 其中,  $|u|_V = |A^V u|$ .

设非线性映射  $F: X \rightarrow H$  满足一致 Lip 条件:

$$|F(u) - F(v)| \leq L|u - v|_V, \forall u, v \in X, L > 0 \text{ 与 } u, v \text{ 无关.}$$

\* 国家自然科学基金 (19471086) 及广东省自然科学基金 (950045) 资助项目

收稿日期: 1997-01-10 陈显强, 男, 34 岁, 副教授

设  $T(t)$  是  $-A$  在  $H$  上生成的半群, 则  $T(t)$  是紧解析半群, 且对任何  $u = \sum_{j=1}^{\infty} (u, e_j) e_j \in H$ , 有  $T(t)u = \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\lambda_j t} (u, e_j) e_j, t \geq 0; T(t)u \in D(A), t > 0$ .

当  $u \in D(A^V)$  时, 有  $A^V u = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^V (u, e_j) e_j$ .

容易证明,  $T(t)$  限制在  $X = D(A^V)$  上时按  $X$  范数也是强连续半群, 并且在有限维子空间  $\text{span}\{e_1, \dots, e_n\}$  上能延拓为强连续群.

在状态空间  $X$  中考虑下列动力系统

$$\frac{du}{dt} + Au = F(u), u(0) = u_0 \tag{1}$$

并考虑下列非线性积分方程

$$u(t) = T(t - t_0)u(t_0) + \int_{t_0}^t T(t - s)F(u(s)) ds, 0 \leq t_0 \leq t < +\infty, u(0) = u_0 \tag{2}$$

根据文 [6] 中的定理 5. 6. 7, 对每个  $u_0 \in X, (1)$  存在唯一的经典解  $u(t) = S(t)u_0, t \geq 0$ , 这里  $S(t)$  表示 (1) 的解半群, 并且  $u(t) = S(t)u_0$  也是 (2) 的唯一解;  $u(t): [0, +\infty) \rightarrow X$  连续,  $\frac{du}{dt}: (0, +\infty) \rightarrow H$  连续, 当  $t > 0$  时有  $u(t) \in D(A)$ .

此外, 如果  $u(t): (-\infty, 0] \rightarrow X$  是连续函数, 且对任何  $t_0 \leq t \leq 0$  满足

$$u(t) = T(t - t_0)u(t_0) + \int_{t_0}^t T(t - s)F(u(s)) ds, t_0 \leq t \leq 0 \tag{3}$$

那么称  $u(t)$  是积分方程 (3) 的一个解; 当  $u(0) = u_0$  时, 用  $u(t, u_0)$  表示这个解.

设  $E$  是  $X$  的一个子集, 如果  $E$  是一个有限维的 Lip 流形, 且  $E$  是正不变集即  $S(t)E \subset E (t \geq 0)$ , 并且  $E$  指数吸引系统 (1) 在  $X$  中的所有解  $u(t) = S(t)u_0, (u_0 \in X)$ , 那么称  $E$  是系统 (1) 在  $X$  中的惯性流形

设  $J$  是一个实数区间,  $b > 0$ , 记  $C_b(J, X)$  为满足  $f(t): J \rightarrow X$  连续且  $\|f\| = \sup_{t \in J} e^{bt} \|f(t)\| < +\infty$  的所有函数  $f$  按范数  $\|f\|$  构成的 Banach 空间. 往下主要用到  $J = R^- = (-\infty, 0]$  和  $J = R^+ = [0, +\infty)$  两种情形.

## 2 惯性映射和不变 Lipschitz 流形

设  $n$  是某个自然数且  $\lambda_n < \lambda_{n+1}$ .  $P$  是  $H$  到有限维子空间  $\text{Span}\{e_1, \dots, e_n\}$  的投影,  $Q$  是  $H$  到  $\text{Span}\{e_{n+1}, e_{n+2}, \dots\}$  的投影. 取  $b$  和  $T, U$  如下

$$\lambda_n < b < \lambda_{n+1}, T = b - \lambda_n, U = \lambda_{n+1} - b \tag{4}$$

首先用初等分析技巧易证下列引理 1

引理 1 (1) 对每个  $u \in X$ , 都有

$$\begin{aligned} |T(t)Pu| &\leq e^{-\lambda_n t} |u|_V, t \leq 0; \\ |T(t)Qu| &\leq e^{-\lambda_{n+1} t} |u|_V, t \geq 0. \end{aligned}$$

(2) 对每个  $u \in H$ , 都有

$$\begin{aligned} |T(t)Pu| &\leq \lambda_n^V e^{-\lambda_n t} |u|, t \leq 0; \\ |T(t)Qu| &\leq (V e^{-\lambda_n t} + \lambda_{n+1}^V) e^{-\lambda_{n+1} t} |u|, t > 0. \end{aligned}$$

然后按下列步骤构造不变流形.

引理 2 对每个  $a \in PX$  和  $h(t) \in C_b(R^-, X)$ , 令  $f(t) \triangleq T(t)a + \int_0^t T(t-s)PF(h(s))ds + \int_{-\infty}^t T(t-s)QF(h(s))ds, t \leq 0$ , 那么  $f(t) \in C_b(R^-, X)$ , 并且  $\|f\| \leq \|a\| + K(T, U, V)(L\|h\| + M_0)$ , 其中

$$M_0 = L\|h(0)\| + \|F(h(0))\| \tag{5}$$

$$\begin{cases} K(T, U, V) = K(T, V) + K(U, V) \\ K(T, V) = \lambda_n^V / T, K(U, V) = \frac{V(1 - V_+ e)}{(1 - V)_+ e^{kV}} U^{k-1} + \lambda_{n+1}^V / U \end{cases} \tag{6}$$

证明 (1) 记  $f_0(t) \triangleq T(t)a, t \leq 0$ . 由半群  $T(t)$  的性质知  $f_0(t): R^- \rightarrow X$  连续, 且

$$\|f_0\| = \sup_{t \leq 0} \|e^{bt} T(t)a\| \leq \sup_{t \leq 0} \|e^{Tt}\| \|a\| \leq \|a\|.$$

(2) 记  $f_1(t) \triangleq \int_t^0 T(t-s)PF(h(s))ds, t \leq 0$ . 注意到

$$\|F(h(s))\| \leq L\|h(s)\| + M_0, \forall s \leq 0 \tag{7}$$

任给  $a > 0$ , 按连续的定义可证  $f_1(t): [-a, 0] \rightarrow X$  连续. 再由引理 1 及 (7) 式容易验证

$$\|f_1\| = \sup_{t \leq 0} \|\int_t^0 e^{bt} f_1(t)\| \leq K(T, V)L(\|h\| + M_0).$$

(3) 记  $f_2(t) \triangleq \int_{-\infty}^t T(t-s)QF(h(s))ds, t \leq 0$ . 首先对任给的  $a > 0$ , 当  $-a \leq t \leq 0$  且  $d > a$  时, 由引理 1 及 (7) 式可得

$$\int_{-\infty}^{-d} |T(t-s)QF(h(s))| v ds \leq e^{ab} (L\|h\| + M_0) \int_d^{+\infty} (V e^{-Vf} + \lambda_{n+1}^V) e^{-Uf} df$$

由此知  $f_2(t)$  对  $t \leq 0$  有意义. 其次, 对任给  $X > 0$ , 取某一个  $d > a$  使得对任何  $-a \leq t \leq 0$  都有

$$\int_{-\infty}^{-d} |T(t-s)QF(h(s))| v ds < X/3$$

再由  $h(s): [-a-d, 0] \rightarrow X$  一致连续, 仿 (2) 可证  $f_2(t): [-a, 0] \rightarrow X$  也一致连续. 最后有估计式

$$\|f_2\| = \sup_{t \leq 0} \|\int_t^{+\infty} e^{bt} f_2(t)\| \leq \int_0^{+\infty} (V e^{-Vf} + \lambda_{n+1}^V) e^{-Uf} df \cdot (L\|h\| + M_0)$$

及  $\int_0^{+\infty} (V e^{-Vf} + \lambda_{n+1}^V) e^{-Uf} df \leq K(\beta, \gamma)$  成立. 至此引理 2 证毕.

引理 3 设  $K(\alpha, \beta, \gamma)L < 1$ , 那么对每个  $\xi \in PX$ , 下列积分方程

$$h(t) = T(t)a + \int_0^t T(t-s)PF(h(s))ds + \int_{-\infty}^t T(t-s)QF(h(s))ds, t \leq 0 \tag{8}$$

在  $C_b(R^-, X)$  中存在唯一解  $h(t) = h_2(t)$ .

证明 给定  $a \in PX$ , 对每个  $h(t) \in C_b(R^-, X)$ , 由引理 2 知方程 (8) 的右端定义了函数  $f(t) \in C_b(R^-, X)$ . 考察映射  $G: h(t) \rightarrow f(t)$ , 则容易验证

$$\|G(h_1) - G(h_2)\| \leq K(T, U, V)L\|h_1 - h_2\|$$

. 因此,  $G$  是 Banach 空间  $C_b(R^-, X)$  到自身的压缩映射, 故存在唯一的不动点, 也即积分方程 (8) 存在唯一的解.

引理 4 设  $K(T, U, V)L < 1$ , 按下式定义惯性映射  $H: PX \rightarrow QX$ ,

$$H(a) = \int_{-\infty}^0 T(-s)QF(h(s))ds, \forall a \in PX \quad (9)$$

其中  $h(t)$  是积分方程 (8) 对应于  $a$  的唯一解, 那么  $H$  是一致 Lip 映射, 且

$$\text{Lip}(H) \leq K(U, V)L(1 - K(T, U, V)L)^{-1} \quad (10)$$

证明 任给  $a_1, a_2 \in PX$ , 容易直接验证

$$|H(a_1) - H(a_2)| \leq K(U, V)L(1 - K(T, U, V)L)^{-1} |a_1 - a_2|_V$$

引理 5 设  $u(t) = u(t, u_0)$  是积分方程 (3) 的解, 那么当  $u(t) \in C_b(R^-, X)$  时,  $u(t)$  能写成

$$u(t) = T(t)Pu_0 + \int_0^t T(t-s)PF(u(s))ds + \int_{-\infty}^t T(t-s)QF(u(s))ds, t \leq 0$$

也即  $u(t)$  是积分方程 (8) 对应于  $a = Pu_0$  的解.

证明 因为  $u(t)$  满足 (3), 所以对  $t \leq 0$  有

$$u(0) = u_0 = T(-t)u(t) + \int_t^0 T(-s)F(u(s))ds$$

用  $P$  作用后得  $Pu_0 = T(-t)Pu(t) + \int_t^0 T(-s)PF(u(s))ds$ . 所以有

$$Pu(t) = T(t)Pu_0 + \int_0^t T(t-s)PF(u(s))ds, t \leq 0$$

又  $Q$  作用 (3) 式两边得  $Qu(t) = T(t-t_0)Qu(t_0) + \int_{t_0}^t T(t-s)QF(u(s))ds, t_0 \leq t \leq 0$ , 当

$t_0 \rightarrow -\infty$  时  $|T(t-t_0)Qu(t_0)| \rightarrow 0$ , 而  $\int_{-\infty}^t |T(t-s)QF(u(s))|vds$  收敛, 故  $Qu(t) = \int_{-\infty}^t T(t-s)QF(u(s))ds$ .

引理 6 如果  $h(t)$  是积分方程 (8) 对应于  $a \in PX$  的解, 那么  $h(t)$  是积分方程 (3) 的解, 且  $h(0) = a + H(a)$ .

证明 直接验证即可.

引理 7 设  $K(T, U, V)L < 1$ , 定义集合

$$E \triangleq \{u_0 | u_0 \in X \text{ 且积分方程 (3) 存在解 } u(t, u_0) \in C_b(R^-, X)\} \quad (11)$$

那么  $E = \text{Graph}(H)$  刚好是惯性映射  $H$  的图象, 且  $E$  是不变集, 即  $S(t)E = E, t \geq 0$ .

证明 首先根据引理 5 和引理 6 容易证明  $E = \text{Graph}(H)$ . 其次对每个  $u_0 \in E$ , 当  $t \geq 0$  时令  $\tilde{u}(t) = S(t)u_0$  是 (1) 也即是 (2) 的唯一解; 当  $t \leq 0$  时, 令  $\tilde{u}(t) = u(t, u_0)$  是 (3) 在  $C_b(R^-, X)$  中的唯一解, 易见

$$\tilde{u}(t) = T(t-t_0)\tilde{u}(u_0) + \int_{t_0}^t T(t-s)F(\tilde{u}(s))ds$$

由此易知  $\tilde{u}(t) \in E, \forall t \in (-\infty, +\infty)$ , 并且  $S(t)E = E, t \geq 0$ .

### 3 指数吸引与惯性流形

定理 8 任给  $0 < W < 2$ , 如果  $K(T, U, V)L < W/(1+W)$ , 那么对任何  $u_0 \in X$ , 存在唯一的  $u^* \in \text{Graph}(H)$  使得

$$|S(t)u_0 - S(t)u^*| \leq (1+W)|Q(u_0 - u^*)|ve^{-bt}, t \geq 0 \quad (12)$$

$$|Q(u_0 - u_0^*)| \leq (4/4 - W) |H(Pu_0) - Qu_0| \quad (13)$$

其中,  $H$ 是(9)定义的惯性映射且  $Lip(H) < W$

证明 首先由  $K(T,U,V)L < W/(1+W)$ 得到  $K(T,U,V)L < 1, \frac{K(T,U,V)L}{1 - K(T,U,V)L} < W,$

$\frac{1}{1 - K(T,U,V)L} < (1+W)$ .故由(10)立即得  $Lip(H) < W$

其次,对给定的  $u_0 \in X$ ,因而  $u(t) = S(t)u_0$ 唯一确定,在 Banach空间  $C_b(R^+, X)$ 中考察方程

$$\begin{cases} W(t) = T(t-t_0)W(t_0) + \int_{t_0}^t T(t-s)(F(W(s)+u(s)) - F(u(s)))ds \\ 0 \leq t_0 \leq t < +\infty, \quad W(0) = W_0 \end{cases} \quad (14)$$

类似于惯性映射和不变 Lipschitz流形的讨论,容易逐一验证下面结论:

(1) 对每个  $Y \in QX$ 及  $W(t) \in C_b(R^+, X)$ ,函数  $g(t) = T(t)Y + \int_0^t T(t-s)Q(F(W(s) + u(s)) - F(u(s)))ds + \int_{-\infty}^t T(t-s)P(F(W(s) + u(s)) - F(u(s)))ds, (t \geq 0)$ 是  $R^+ \rightarrow X$ 的连续函数,且

$$\|g\| = \sup_{t \geq 0} |e^{ht}g(t)| \leq \|Y\| + K(T,U,V)L\|W\|.$$

这里需要用到如下性质:半群  $T(t)$ 限制  $X = D(A^V)$ 上仍是  $C_0$ 半群.实际上易证:对任何  $u_0 \in X, T(t)u_0 \in [0, +\infty) \rightarrow X$ 是连续函数.

(2) 对每个  $Y \in QX$ ,下列积分方程

$$W(t) = T(t)Y + \int_0^t T(t-s)Q(F(W(s)+u(s)) - F(u(s)))ds + \int_{+\infty}^t T(t-s)P(F(W(s)+u(s)) - F(u(s)))ds, (t \geq 0) \quad (15)$$

在 Banach空间  $C_b(R^+, X)$ 中存在唯一解  $W(t) = W_Y(t)$ ,且

$$\|W\| = \sup_{t \geq 0} |e^{bt}W(t)| \leq (1 - K(T,U,V)L)^{-1} \|Y\| \leq (1+W) \|Y\| \quad (16)$$

(3) 对每个  $Y \in QX$ 令

$$j(Y) = \int_{-\infty}^0 T(-s)P(F(W(s)+u(s)) - F(u(s)))ds \quad (17)$$

其中  $W(t) = W_Y(t)$ 中积分方程(15)对应于  $Y$ 的唯一解.那么映射  $j: QX \rightarrow PX$ 是一致  $Lip$ 映射,易见  $j(0) = 0$ ,且

$$Lip(j) \leq K(T,V)L(1 - K(T,U,V)L)^{-1} < W \quad (18)$$

(4) 设  $W(t) \in C_b(R^+, X), Y \in QW_0$ .那么  $W(t)$ 满足积分方程(14)的充要条件是  $W(t)$ 满足积分方程(15).这时  $W_0 = Y + j(Y)$ .

最后,对给定的  $u_0 \in X$ .考察映射  $G(Y) = H(Pu_0 + j(Y)) - Qu_0, \forall Y_1, Y_2 \in QX$ ,易见  $|G(Y_1) - G(Y_2)| \leq Lip(H)Lip(j) \|Y_1 - Y_2\|, \forall Y_1, Y_2 \in QX$ .由(10)和(18)得  $Lip(H) + Lip(j) < W < 2$ ,故  $Lip(H)Lip(j) < W/4 < 1$ ,所以这里的映射  $G$ 是 Banach空间  $QX$ 到自身的压缩映射,故存在唯一的不动点  $Y$ ,即存在唯一的  $Y$ 满足

$$Y + Qu_0 = H(Pu_0 + j(Y)) \quad (19)$$

综上所述,对任给的  $u_0 \in X$ , 首先存在唯一的  $Y \in QX$  使得 (19) 成立. 对这个  $Y$ , 存在唯一的  $W(t) \in C_b(R^+, X)$  满足积分方程 (15) 并 (16) 成立, 且  $W_0 = Y + j(Y)$ , 所以  $W(t)$  满足积分方程 (14). 令  $u^*(t) = W(t) + u(t), \geq 0$ , 则  $u^*(t)$  满足积分方程 (2), 且  $u_0^* \triangleq u^*(0) = W_0 + u_0 = Y + Qu_0 + Pu_0 + j(Y) = H(Pu_0 + j(Y)) + Pu_0 + j(Y)$ , 故  $u_0^* \in \text{Graph}(H)$ . 注意到  $P(u_0^* - u_0) = j(Y), Q(u_0^* - u_0) = Y$ , 所以有

$$\begin{aligned} |Q(u_0^* - u_0)|_V &= |H(Pu_0 + j(Y)) - Qu_0|_V \leq \text{Lip}(H) |j(Y)|_V + |H(Pu_0) - Qu_0|_V \leq \\ &\text{Lip}(H) \text{Lip}(j) |Y|_V + |H(Pu_0) - Qu_0|_V \leq (W/4) |Q(u_0^* - u_0)|_V + |H(Pu_0) - Qu_0|_V \end{aligned}$$

由此即得 (13), 而 (16) 推出 (12), 故定理 8 获证.

注: 若取  $b = \frac{\lambda_n + \lambda_{n-1}}{2}$ , 则  $T = U = \frac{\lambda_{n-1} - \lambda_n}{2}$ , 这时定理 8 中的条件  $K(T, U, V)L < \frac{W}{1+W}$  即为谱间隙条件

$$\lambda_{n-1} - \lambda_n > 2 \frac{1+W}{W} \left\{ \lambda_n^V + \lambda_{n-1}^V + \frac{V(1-V_+ e)}{2(1-V_+ e)^{1+V}} (\lambda_{n-1} - \lambda_n)^V \right\} \quad (20)$$

致谢 作者对赵怡教授的指导与鼓励表示深切的感谢.

## 参 考 文 献

- 1 Teman R. Infinite Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics. New York: Springer, 1988
- 2 Foias C, Sell G, Teman R. Inertial manifolds for nonlinear evolutionary equations. J Diff Eqns, 1988, 73 (2): 309~ 353
- 3 Chow S N, Lu K. Invariant manifolds for flows in Banach spaces. J Diff Eqns, 1988, 74 (2): 285 ~ 317
- 4 Romanov A V. Sharp estimates of the dimension of inertial manifolds for nonlinear parabolic equations. Russian Acad Sci Izv Math, 1994, 43 (1): 3~ 47
- 5 刘青民. 用 Hadamard 方法构造惯性流形. 数学学报, 1995, 38 (4): 505~ 511
- 6 周鸿兴, 王连文. 线性算子半群理论及其应用. 济南: 山东科学技术出版社, 1994

## Construction of Inertial Manifolds by the Integral Equation Method

Chen Xianqiang\*

**Abstract** The integral equation method is used to construct inertial manifolds for an infinite dimensional nonlinear dynamic system and the known theorems about existence of inertial manifolds are improved.

**Keywords** inertial manifold, spectral gap condition, integral equation method

\* Department of Mathematics, Zhongshan University, Guangzhou 510275