

Stokes 高阶水波对复合圆柱群的绕射波浪力*

黄 华 孙明光 吴建华 张水营
(中山大学应用力学与工程系, 广州 510275)

摘 要 以单复合圆柱的 Stokes n 阶绕射波浪力算法为基础, 建立了对复合圆柱群波浪力的相应计算形式. 分析了对慢收敛无限自由面积分的两种处理方法; 对双直立圆柱二阶波浪力的实算检验了方法的有效性.

关键词 Stokes 有限振幅波, 复合圆柱群, 绕射, 散射, 波浪力

分类号 O 353. 2

针对 Stokes 有限振幅波为最常用的计算波型及复合圆柱为最常见的海工结构类型的特点, 本文作者曾经提出了有限振幅波对单复合圆柱绕射波浪力的实用算法^[1]. 由于近海工程中直径圆柱群的结构形式也常有出现, 因而提出对复合圆柱群的相应算法已十分必要. 目前, 已有的少数理论结果仅限于对柱群最简单形式——双直立圆柱二阶问题的初步讨论^[2-4], 且主要限于边界元法或近似法. 本文作者曾讨论了浮筒与简易重力平台双结构二阶散射波浪力的计算问题^[5], 但对无限自由面积分处理这一关键问题未作具体阐述且无计算结果. 本文将对 Stokes n 阶水波对一般类型复合圆柱群的绕射波浪力的解析积分算法给予推导, 并以双柱问题为例, 讨论对单柱无限自由面积分两种实用处理方法在柱群问题中推广

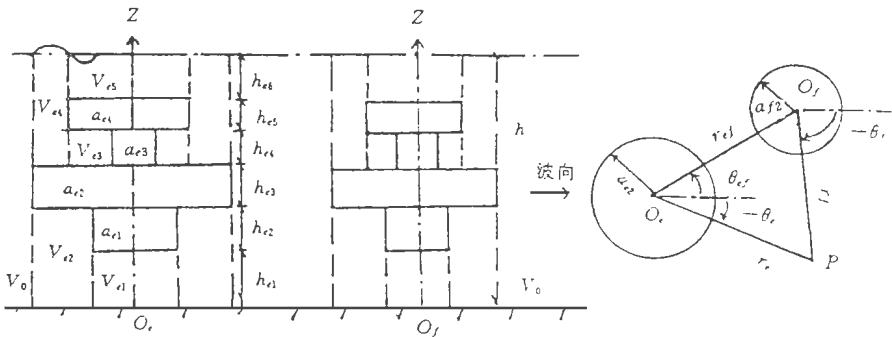


图 1 垂直复合圆柱群及流域划分形式

的具体过程; 主要计算结果与有关结果一致, 反映了本文方法的可行性.

* 国家自然科学基金 (19572077) 资助项目

收稿日期: 1997-01-15 黄华, 男, 35岁, 讲师

1 基本方法

图 1 包含了复合圆柱群基本类型的所有可能形式. 其中各单圆柱内流域的划分方法同文 [1], 基本流域为 5 种, 外流域为 V_0 . 各符号标定如图示.

1.1 n 阶绕射波势边值问题与一阶解

设 H, H_n, H_n^i, H_n^s 分别表示 Stokes 波速度总势, 第 n 阶绕射, 入射及散射波速度势, 对应图 1 结构的相应边值问题为:

$$H(r_e, \theta_e, z, t) = XH_1 + XH_2 + \dots + XH_n + \dots \tag{1}$$

$$H_n = H_n^i + H_n^s = \text{Re}[(h_n^i + h_n^s) e^{-in\theta_e}] = \text{Re}(h_n) e^{-in\theta_e} \tag{2}$$

$$\nabla^2 h_n = \nabla^2 h_n^i = \nabla^2 h_n^s = 0 \quad (\text{全流域}) \tag{3}$$

$$\frac{\partial h_n}{\partial z} = \frac{\partial h_n^i}{\partial z} = \frac{\partial h_n^s}{\partial z} = 0 \quad (z = 0) \tag{4}$$

$$g \frac{\partial h_n^s}{\partial z} - n^2 k^2 h_n^s = (1 - W_n) F_n(h_n^i, h_{n-1}, \dots, h_1) \quad (z = h) \tag{5}$$

$$\frac{\partial h_n}{\partial h} = 0 \quad (\text{与流域相交物面}) \tag{6}$$

$$r_e \left(\frac{\partial h_n^s}{\partial r_e} - ik_0 h_n^s \right) \rightarrow O(r_e^{-1}) \quad (k_0 r_e \gg 1; k_0 \tanh k_0 h = n^2 k^2 / g) \tag{7}$$

式中, X 为摄动参数, k 为波频; 式 (7) 为 Sommerfeld 辐射条件模式 (对于 $n \geq 2$, 为近似模式); F_n 为关于 h_n^i (已知) 和 n 阶以下柱群水波速度势的可定函数; 易证对于二阶柱群问题, 其辐射条件存在严格式且同单柱问题 (见文 [1] 式 (8)) 形式相同, 其中坐标系须改变为 (r_e, θ_e, z) . 显然, 柱群波势边值问题形式同文 [1] 关于单柱问题的相应形式基本一致, 区别在于柱群问题的 h_n 须计入柱间散射相互干扰影响, 另外物面条件趋于复杂. 推广 Chakrabarti 对固立穿水面直圆柱群一阶绕射势精确解^[6], 考虑复合柱群间绕射波相互干扰作用, 则柱群外区 V_0 内一阶波势解可取:

$$\begin{aligned} h_1^{(0)} = h_1^{(0)} + h_1^{(0)} = & \sum_{n=-\infty}^{\infty} [-g H t^{n+1} (2k \cosh k_1 h)^{-1} J_n(k_1 r_e) \cosh k_1 z e^{in\theta_e} \\ & + \sum_{j=1}^k \sum_{m=0}^{\infty} A_{nm}^{(f)} K_n(T_m r_f) \cos T_m z e^{i\theta_f + i(1-W_f)^k r_e r_f \cos \theta_f}] \\ & (T_m t g T_m h = -k^2 / g, m = 0, 1, \dots \text{ 且 } T_0 = -ik_1) \end{aligned} \tag{8}$$

式中 $h_1^{(0)}, h_1^{(0)}$ 及 $h_1^{(0)}$ 分别表示 V_0 内一阶绕射势, 入射势和散射势; H 为波高; k_c 为柱群总数; $J_n(x)$ 与 $K_n(x)$ 为第一类及第二类变型贝塞尔函数; $A_{nm}^{(f)}$ 为待定级数系数. 对于 $V_a (i = 1 \sim 5)$ 各内区沿用文 [1] 的势解形式, 只须由 $e^{in\theta_e}$ 取代原式中 $\cos n\theta$, 并将对 n 求和域拓展至 $(-\infty, \infty)$ 区间. 因单一复合圆柱内区级数解未知系数最多不超过 8 种类型, 最少为 0 (固立直圆柱), 故圆柱群总待定未知系数总数不超过 $9k_c$ 项类型 (含外区 k_c 项), 最少仅为 k_c 项 (固立直圆柱群). 为了建立系数方程组, 必须推广单柱方法, 利用各柱面径向流速为零条件及各交接区域界面水流动连续条件, 通过各区段关于 z 变量的余弦函数系正交性, 由富氏级数展开法逐段进行^[1]. 显然, 这一过程必须在交接区段统一柱坐标下完成. 为了实现 k_c 项柱坐标间的相互交换, 须应用贝塞尔加法定理的推广式 (见文 [5] 式 (36)). 对比文 [1] 所述单复合柱

各区势解匹配过程,柱群情形下将略有区别,即须将 V_0 内势解式 (8) 变换为某柱柱坐标下形式,再与此柱内区势解作边界匹配,共进行 k_c 次;而各柱内区间的匹配同文 [1],不超过 3 个区段.易证,由此得出的对级数解各未知系数计算方程为完备的无限维代数方程组.

1.2 第 n 阶绕射波浪力积分解形式

Stokes 第 n 阶绕射波对柱群的波浪力包括 3 项:第 n 阶入射波载,散射波载及 n 阶以下水波势相互耦合项所致载荷.因求势困难而采取积分法计算的待求项即为第 n 阶散射波对柱群的载荷,它包括对各柱的水平波力(矩)及垂直波力(矩),记为 $F_e^{(ij)}$,其中 $i=1(j=1,2)$ 对应第 e 号柱在 Γ 方向上的水平波力矩; $i=2(j=1,2)$ 对应第 e 号柱所受垂直波力(矩),其基本计算式为:

$$F_e^{(ij)} = \iint_{S_{ei}} d \frac{\partial h_n^s}{\partial \bar{q}} n_e^{(ij)} ds = \operatorname{Re} [\rho h k e^{-in\bar{q}} I_e^{(ij)}] = \operatorname{Re} [\rho h k e^{-in\bar{q}} \iint_{S_{ei}} h_n^s n_e^{(ij)} ds] \quad (9)$$

其中, d 为水密度, S_{ei} 表示第 e 号柱体表面 ($i=1,2$ 各表示径向和垂向表面); $n_e^{(ij)}$ 表示对应第 e 号柱径向 Γ 方向或垂向波浪力(矩)计算的柱面单位矢量分量,其设定形式为:

$$n_e^{(ij)} = \begin{cases} W_i \cos(\theta_e - \Gamma) (W_j + W_{jz}) \\ W_2 (W_j + W_{jr} \cos \theta_e) \end{cases} \quad (10)$$

设立一组适合于柱群问题的线性辅助势边值问题,令 $h_e^{(ij)}$ 表示对应 $I_e^{(ij)}$ 计算的势值,有:

$$\Delta^2 h_e^{(ij)} = 0 \quad (\text{全流域内}) \quad (11)$$

$$g \frac{\partial h_e^{(ij)}}{\partial z} - n^2 k^2 h_e^{(ij)} = 0 \quad (z = h) \quad (12)$$

$$\frac{\partial h_e^{(ij)}}{\partial z} = 0 \quad (z = 0) \quad (13)$$

$$r_e \left(\frac{\partial h_e^{(ij)}}{\partial r_e} - ik_n h_e^{(ij)} \right) \rightarrow O(r_e^{-1}) \quad (k_n r_e \gg 1) \quad (14)$$

$$\frac{\partial h_e^{(ij)}}{\partial n} = n_e^{(ij)} \quad (e \text{ 柱表面}), \frac{\partial h_e^{(ij)}}{\partial n} = 0 \quad (f \text{ 柱面}, f \neq e) \quad (15)$$

与文 [1] 单柱情况的辅助势边值问题比较,柱群问题在物面条件形式上有所区别.再结合关于 h_n^s 边值问题式 (3) ~ (7),应用格林积分公式可以推出:

$$I_e^{(ij)} = - \sum_{f=1}^k \iint_{S_f} h_e^{(ij)} \frac{\partial h_n^i}{\partial n} ds + \frac{1}{g} \iint_{S_f} F_n(h_n^i, h_{n-1}, \dots, h_n) h_e^{(ij)} ds \quad (16)$$

其中, S_f 为第 f 号柱体表面, S_f 为自由水表面.因 h_n^i (五阶以内) 已知且 n 阶以下绕射势设为已知,故 $I_e^{(ij)}$ 计算的关键为 $h_e^{(ij)}$ 的解析求解及无限自由面积分的处理.

由于 $h_e^{(ij)}$ 与 h_n^i 边值问题的相似性再考虑物面条件的变化,本文设立了如下形式的辅助势解析解,对于 V_0 区域,取:

$$h_e^{(ij)}(r_e, \theta_e, z) = \sum_{f=1}^k \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (a_{ijnm}^{(f)} \cos n \theta_f + i b_{ijnm}^{(f)} \sin n \theta_f) \times K_n(\lambda_m r_f) \cos \lambda_m z (\lambda_m \operatorname{tg} \lambda_m h = -n^2 k^2 / g) \quad (17)$$

式中 $a_{ijnm}^{(f)}, b_{ijnm}^{(f)}$ 为未知系数,此解较单柱情形明显复杂.为实现各柱坐标间的统一变换,可应用 Graf 加法定理的推广式(文 [5] 式 (52)).对于各柱内区的辅助势,可参照文 [5] 中关于浮

筒与简易平台双结构问题对势解的设定;另外,由于内区辅助势仅需要在各柱自身坐标下进行计算,无需向其它坐标变换,故沿用文 [1] 式 (26) ~ (31) 所给内区势解式亦完全可行且更为简便,只需将 (r, θ) 换为 (r_e, θ_e) 即可. 对于势级数解各未知系数的确立,沿用一阶势边界匹配法,可得到所需系数无限维完备代数方程组,实算中对 n, m 项均可作截项运算.

本文选择复合圆柱群最简单形式——双柱问题进行了校验运算. 在关于 $h_e^{(j)}$ (无垂向波力矩问题且 $k_c = 2$ 及 $e = 1, 2$) 的求算过程中,推广文 [6] 对一阶解的处理法,通过对 n, m 项分别截项取得了相应势解结果.

采用作者曾提出对柱群二阶绕射势的扰动源近似法^[7],用本文方法可对三阶波浪力作近似估算.

1.3 双柱问题自由面积分的特殊算法

由于双柱问题的自由面积分处理法适用于有限区域内的任意数目复合圆柱群类似问题的分析,故本文仅选择双柱这一典型问题来阐述对单柱的方法在柱群情况下的推广应用过程. 文 [1] 已经提出,自由面上的强迫波动项压力扰动在远离柱体时衰减缓慢,致使数值积分困难. 具体到实际积分运算中,主要是对应无穷级数 m 为零的势解分量 (含汉克耳函数) 以 $1/\bar{r}$ 因子在远距离区段缓慢振动衰减使积分不易收敛. 对于柱群计算,这一问题显然依旧存在,且因柱群势解多重级数的特征,使被积函数在形式上更趋复杂. 在文 [1] 中,通过选定分区渐近法处理积分,有效解决了单柱情况下的积分快速收敛问题. 本文将讨论此方法及另一种方法——积分递推法在双柱问题中的应用步骤.

(1) 积分路径设定. 为使双柱问题与单柱问题产生接近或类同点,本文按图 2 所示图形设置了对柱 1 求波力 (矩) 时的特殊积分路径 (对柱 2 情况类似处理即可). 显然,区域 $a_1 \leq r_1 \leq r_0$ (内 $r_0 > r_{12} + a_2$), 的积分仅为有限圆环区域的积分,无积分收敛问题. 对圆环内的小区域: $r_{12} - a_2 \leq r_1 \leq r_{12} + a_2, \theta_{12} - \alpha \leq \theta_1 \leq \theta_{12} + \alpha$ 内的积分只需在割除柱 2 横截面所余小区内作特殊网格数值积分处理即可,本文实算中考虑此局部区域相对整体积分区域仅为微量面积区,故对此区的积分值略去不计. 按图 2 设定,区域 $r_0 \leq r_1 < \infty, 0 \leq \theta_1 \leq 2\pi$ 的积分区域已与单柱情形完全一致,而这一区域的积分正是积分收敛问题的关键.

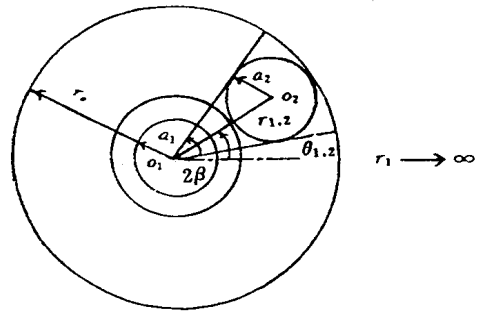


图 2 自由面积分路径 ($r_0 > r_{12} + a_2$)

(2) 慢收敛积分项的处理. 根据复合圆柱群一阶波势 h 解式式 (8), 辅助势 $h_e^{(j)}$ 解式式 (17) 及第 n 阶散射波力 (矩) $F_n^{(j)}$ 解式式 (9), 取 $n = 2, k_c$ 为 2 (双柱), i 为 1 (仅水平波力矩) 即为对双柱二阶问题的相应解式. 因无需计算内区问题, 则 h 解式式 (8) 必有 $A_m^{(j)} = 0 (m = 1, 2, \dots)$ 而使问题简化, 辅助势也无内区问题的计算. 在单柱问题中, 文 [1] 利用笔者曾提出的分区渐近法^[8] 有效计算了无限自由面慢收敛积分而使积分运算速度明显加快.

分区渐近法基本思想在于将全流场划分为: ① 有限区 (图 2 $a_1 \leq r_1 < r_0$ 内), 其内施行 Simpson 或 Gaussian 数值法; ② 远场区 (图 2 $r_1 > r_0$ 内), 其内由势解渐近式化简积分, 通过引入特殊积分式将原积分化为若干绝对收敛无穷级数式作快速估算. 实算表明, 原本在 r_1

$\sim 10^6$ 量级以上纯数值积分方能达到的 2~ 3位精度,在本法下仅需算至 $r_1 \sim 10^3$ 量级即可,故大为节省机时.由于分区渐近法的应用主要取决于积分内函的渐近形态化简,而积分式(16)内涉及项为 $F_2(h_2^i, h_1)$ 及 $h_2^{(j)}$,考虑到单、双柱在远场区波势基本解形式趋于一致,加之 h_1^i, h_2^i 形式不受柱型影响,而单、双柱辅助势形式虽有单、双重级数的区别,但注意到

$$K_n(\lambda_m r_1) = \frac{\pi}{2\lambda_m r_1} e^{-\lambda_m r_1} [1 + O(1/k_2 r_1)] (k_2 r_1 \gg 1; m \geq 1) \quad (18)$$

上式中 λ_m 为实数,渐近式明显与 n 无关且快速衰减,故双柱问题辅助势关于 m 不为零势分量渐近式与单柱情形实质上趋于一致,这从单、双柱波势辐射条件的相同性也可得以间接证实.由此,关于涉及 m 不为零势分量的积分可直接沿用文 [8] 给出的关于化此部积分为无穷级数的特殊转换式(文 [8] 式 (48)).对于 m 为零辅助势分量所涉及积分部分,是整个积分处理的困难点,注意到

$$K_n(\lambda_0 r_1) = H_n^{(1)}(k_2 r_1) = \frac{2}{\pi k_2 r_1} e^{i(k_2 r_1 - \pi/2 - \pi A)} + O[(k_2 r_1)^{-3/2}] \quad (k_2 r_1 \gg 1) \quad (19)$$

与式 (18) 比较,它的衰减速度缓慢许多.由于基本解渐近式与单柱问题一致,仍可应用作者提出的化慢收敛积分为快速估算级数的特殊关系(文 [8] 式 (50))来计算积分,与单柱问题比较区别仅在于多重级数重数增加.本文应用对单柱问题的修正程序计算纵向排列 ($\theta_{12} = 0, T = 0$) 的双柱问题取得满意结果.

笔者^[5]曾指出由吴建华提出的对单柱自由面积分的另一种快速估算法——积分递推法^[9]也可适用于一般圆柱群问题,以下作出概要论证:

文 [9] 证明了积分内函多重级数项可化为一般三重贝塞尔函数积分式,即有:

$$F_{n,m}(a, b, c; t) = \int_{t_0}^t s z_n^{(1)}(as) z_m^{(2)}(bs) z_n^{(3)}(cs) ds \quad (20)$$

其中, $z_n^{(i)}(s)$ 为不同类别 n 阶贝塞尔函数一般式, a, b, c 为一般性参数,可取 k_1, k_2 或 λ_m, t_0 取 1, t 取正实数或 ∞ . 利用贝塞尔函数的若干递推公式,便可将 $F_{n,m}$ 化为仅对 $F_{0,0}$ 的运算,从而化简了积分过程.

考察本文对双柱各势解的基本设定,因基本解与单柱问题完全一致,再注意到 $F_{n,m}$ 所涉及三重贝塞尔函数均为任意阶类型,则双柱辅助势解中的 n 阶贝塞尔函数(单柱仅取一阶)仍适用于通式 $F_{n,m}$ 的内函关系,即自由面积分内函多重级数函数项仍可化为 $F_{n,m}$ 形式计算,只是在双柱计算中,待算的 $F_{n,m}$ 项将较单柱情况为多;另外按图 2 设定的积分路径,递推法对 t_0 的取值应为 $r_1^2 + a^2$.

2 实算分析

为校验单柱法在柱群问题上推广使用的有效性,本文选择了纵向排列双固立刺水面等径直圆柱(图 1, $a_{1i} = a_{2i} = a; h_{11} = h_{16} = h_{21} = h_{26} = 0; e(f) = 1 \sim 2$ 且 $T = 0, \theta_{12} = \theta_{21} = 0$ 的特殊情形)进行实算. Stokes 波型取二阶.具体计算将涉及一阶波浪力、一阶势耦合所致二阶倍频波浪力、二阶定常波浪力及二阶入射与散射波浪力五项作用计算.前四项计算在有关波势值已知的条件下对各柱直接积分即可.第五项第二阶散射波浪力计算将涉及本文所提方法.

图 3a~ 3d 给出了实算的一些主要结果.图中 C_f 为无量纲最大水平波力值(无量纲比例

因子为 $d_g H \pi a^2 / 2$). 图 3a, 3b 为给定参数 $h/a, r_{12}/a$ 及 H/L 值下各柱最大二阶水平波浪力随绕射参数 $k_1 a$ 的变化状况, 其结果与由 Ghalayini 和 Williams^[2] 应用边界单元数值法计算的结果十分接近, 从而校验了本法的可靠性. 由图中可以看出柱 2 由于柱 1 对其正面波浪作用的遮掩效应, 故其平均最大水平波浪力 (一、二阶) 要小于柱 1. 图 3c, 3d 表示了由本方法给出的两柱间距及波陡对最大二阶波浪力的可能影响, 可以看到, 间距对最大二阶波浪力的影响与线性问题类同, 波陡的增加则明显加大了最大二阶波浪力的作用, 这与文 [1] 中对单柱计算的结果有相似的趋向.

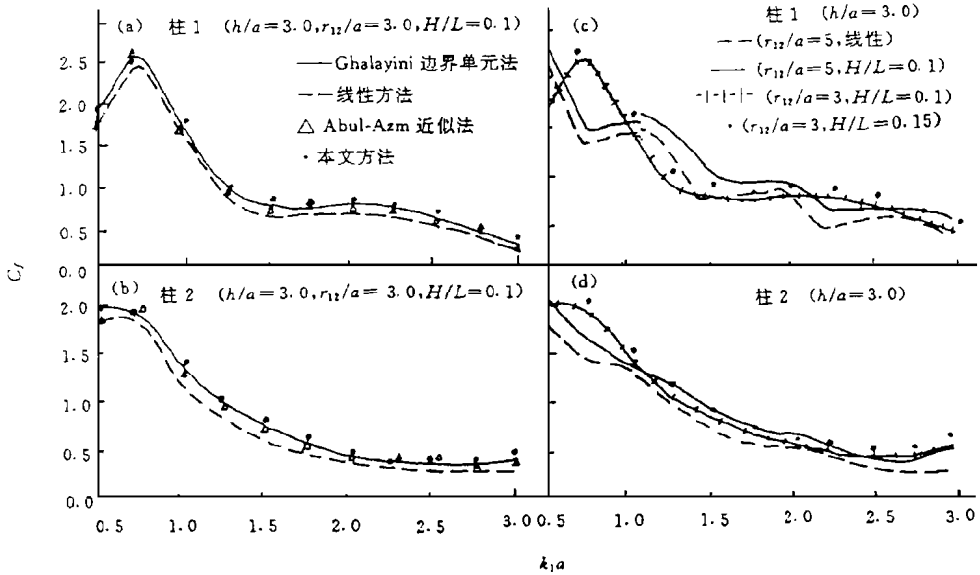


图 3 对双柱各柱的最大二阶波浪力

3 结 论

(1) 将单复合圆柱 Stokes 高阶绕射波浪力的算法有效推广到一般型复合圆柱群. 通过对柱群问题所涉及积分式的特殊设定及对有关波势的解析求解, 使柱群高阶波浪力计算具备了使用单柱方法的条件.

(2) 在 $n-1$ 阶波势已定条件下, 本文方法可计算到 n 阶绕射波浪力作用. 利用对柱群的二阶势近似解, 可计算出柱群第三阶波浪力近似值.

(3) 本文对柱群的简单类型——纵向排列等径直立双圆柱问题给予了实算. 结果与有关严格数值方法的结果十分吻合. 实算中, 本文采用了对无限自由面积分的分区渐近法. 通过讨论, 论证了用于单柱问题的两种自由面积分处理法: 渐近法与递推法均可用于一般柱群问题. 与其它方法比较, 本法在方法上 (势解解析化、积分特殊设定及多种简化处理) 及适用范围 (可用于高阶任意型复合圆柱群包括多腿式重力平台等) 均具有优势.

参 考 文 献

- 1 黄华, 张涤明, 孙明光. 有限振幅波对复合圆柱绕射波浪力的实用算法. 中山大学学报, 1996, 35 (5): 33~ 38
- 2 Williams A N, Abul-Azm A G, Ghalayini S A. A comparlson of complete and approximate solutions for second-order diffraction loads on arrays of vertical circular cylinders. Ocean Eng, 1990, 11 (5): 427~ 445
- 3 Masuda K, Nagai T. Nonlinear wave forces on a pair of vertical cylinders. J offshore Mechanics and Arctic Eng, 1991, 113 (1): 1~ 8
- 4 Abul-Azm A G, Williams A N. Approximation of second-order diffraction loads on vertical cylinder arrays. J Fluid Struct, 1989, 3 (1): 17~ 36
- 5 黄华, 吴建华, 孙明光. 第二阶散射波对垂直圆柱群作用的解析算法. 暨南大学学报, 1996, 17 (5): 93~ 102
- 6 Chakrabarti S K. Wave forces on multiple vertical cylinders. J Waterway Port Coastal and Ocean Eng, ASCE, 1978, 104 (2): 147~ 161
- 7 黄华, 张涤明, 孙明光. 组合圆柱群绕射波势理论. 1995年全国水动力学研讨会文集. 北京: 海洋出版社, 1995, 122~ 128
- 8 黄华, 张涤明, 孙明光. 垂直圆柱高阶波浪力的积分计算. 1995年全国水动力学研讨会文集. 北京: 海洋出版社, 1995, 116~ 121
- 9 Wu Jianhua, Fang Ying. On the numerical evaluation of the second order wave diffraction loads in regular sea. Proc of 7th Intlworkshop on Water Waves and Floating Bodies, France Val de Reail, 1992, 1: 24~ 32

Stokes Higher Order Wave Diffraction Forces on Multiple Compound Circular Cylinders

Huang Hua* Sun Mingguang Wu Jianhua Zhang Shuiying

Abstract A Special evaluation form based on the integral theorem for an isolated compound cylinder is presented to predict the Stokes n order diffraction wave forces on multiple compound circular cylinders. Two kinds of methods for computing slowly convergent integrals over infinite free surface are analyzed. The results of second order wave forces on a pair of surface-piercing cylinders give a verification of the theories presented in this paper.

Keywords stokes finite amplitude wave, multiple compound circular cylinders, diffraction, scattering, wave force

* Department of Applied Mechanics and Engineering, Zhongshan University, Guangzhou 510275