第 36卷 增 刊
1997年 6月

中山大学学报 (自然科学版)
ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM UNIVERSITATIS SUNYATSENI

Vol. 36 Suppl.
Jun. 1997

Hausdorff测度的一个等价定义*

耿祥义
(中山大学数学系,广州 510275)

摘 要 给出了 Hausdorff测度的一个等价形式.通过这个等价形式可以明显地看出 Hausdorff测度与填充测度的区别与联系.

关键词 Hausdorff测度,填充测度,Vitali覆盖
分类号 O 189.1

1 有关定义和引理

对一个集合的 Hausdorff测度以及 Hausdorff维数的计算和估计是分形几何中较为重要的问题之一. 1982年, Tricot[1]引入了填充测度与填充维数这两个重要的概念,此后, Hausdoff维数与填充维数, Hausdorff测度与填充测度之间的关系成为人们所关注的问题之一[1-4].本文给出了 Hausdorff测度的一个等价形式,通过这个等价形式可以明显地看出 Hausdorff测度与填充测度的区别与联系.

这里简要给出 Hausdorff测度及填充测度的定义,细节可参见引文 [1, 2, 5].

R^n表示通常的欧氏空间.设 U是 R^n的一个非空子集, U的直径定义为 $|U| = \sup\{|x-y|: x, y\in U\}$.设 E是 R^n的子集, $0\leq s<+\infty$, $\delta>0$.如果 $\{U_i\}$为可数(或有限)个直径大于零且不超过 δ的集构成的覆盖 E的集类,则称 $\{U_i\}$为 E的一个 δ-覆盖. 定义

$$H^s_\delta(E)= \inf\left\{\sum_i |U_i|^s: \{U_i\}\text{为 }E\text{的 }\delta\text{-覆盖}\right\}$$

E的 s-维 Hausdorff-测度 $H^s(E)$定义为

$$H^s(E) = \sup_{\delta>0} H^s_\delta(E) = \lim_{\delta\to 0} H^s_\delta(E)$$

E的 Hausdorff-维数 $\dim_H E$满足:

$$\dim_H E= \inf\{s: H^s(E)= 0\}; \quad \dim_H E= \sup\{s: H^s(E)= +\infty\}$$

设 $F\subset R^n$是有界集, $0\leq s<+\infty$. 令

$$P^s_\delta(F) = \sup\left\{\sum_i |B_i|^s: \{B_i\}\text{是球心在 }F\text{上,半径最大为 }\delta\text{,互不相交的球族.}\right\};$$

$$P^s_0(F) = \lim_{\delta\to 0} P^s_\delta(F)$$

设 $E\subset R^n$, $0\leq s<+\infty$, E的 s-维填充测度定义为

---

* 广东省博士后科学基金(016B083)资助项目
收稿日期: 1996-09-26 耿祥义,男, 34岁,博士,副教授

$$P^s(E) = \inf\{\sum_i P^s_0(E_i): \{E_i\}\text{是 }E\text{的可数或有限覆盖,并且 }E_i\text{都是有界集}.\}$$

. 　E的填充维数 $\dim_p(E)$满足:

$$\dim_p(E) = \inf\{s: P^s(E) = 0\}; \dim_p(E) = \sup\{s: P^s(E) = +\infty\}$$

设 $E\subset R^n$,R^n的一个集族$\mathscr{U}$称为是 E的一个 Vitali-覆盖,假如对任意的 $x\in E$和正数 W,存在 $U\in\mathscr{U}$,使得 $x\in U$, $0<|U|\leq$ W,并且对任意的 $U\in\mathscr{U}$,有 $U\cap E\neq\varnothing$.特别地,当$\mathscr{U}$中的成员都是闭集时,称$\mathscr{U}$是 E的闭 Vitali-覆盖.

设$\mathscr{U}$是 E的 Vitali-覆盖, $0\leq s<+\infty$.

令 $$V^s_{\mathscr{U}}(E) = \sup\{\sum_i |U_i|^s: \{U_i\}\subset\mathscr{U},\text{并且 }U_i\cap U_j\neq\varnothing\ (i\neq j)\}.$$

记

$$\mathscr{A}_E = \{\mathscr{U}: \mathscr{U}\text{是 }E\text{的 Vitali-覆盖}\}.$$

定义 1　设 $E\subset R^n$, $0\leq s<+\infty$.定义 $V^s(E) = \inf\{V^s_{\mathscr{U}}(E): \mathscr{U}\in\mathscr{A}_E\}$.

定理 1　V^s是 R^n上的外测度,并且对任意的 $E\subset R^n$, $0\leq s<+\infty$,有 $V^s(E) = H^s(E)$.

注 1　文 [3]证明了,对任意 $E\subset R^n$,有 $H^s(E)\leq P^s(E)$.由定义 1可知,对任意的有界集 F, $0\leq s<+\infty$和正数 W,有 $V^s(F)\leq P^s_{\text{W}}(F)$.那么由定理 1可知,对任意的 $E\subset R^n$,有 $H^s(E) = V^s(E)\leq P^s(E)$.

为了证明定理 1,我们需要下列 Vitali-覆盖定理.

Vitali-覆盖定理[5]　设 $E\subset R^n$, $0\leq s<+\infty$,$\mathscr{U}$是 E的闭 Vitali-覆盖.那么$\mathscr{U}$中存在可数个互不相交的成员 $U_1, U_2,\cdots, U_n,\cdots$,使得$\sum_i |U_i|^s = +\infty$或 $H^s(E-\bigcup_i U_i) = 0$.

假如 E是 H^s-可测集,并且 $0<H^s(E)<+\infty$,则称 E是一个 s-集.设 $x\in R^n$,一个 s-集 E在 x的上凸密度定义为[1]

$$D^s_c(E,x) = \limsup_{r\to 0}\left\{\frac{H^s(E\cap U)}{|U|^s}: x\in U, 0<|U|\leq r, U\subset R^n\right\}.$$

引理 1[5]　设 E是一个 s-集,那么存在集合 F, $F\subset E$,使得 $H^s(E-F) = 0$,并且对任意的 $x\in F$有 $D^s_c(E,x) = 1$.

2　定理 1的证明

首先证明 V^s是外测度.设 $\{E_i\}$是 R^n中的任意可数集族.对 $\forall$ X>0, ,存在$\mathscr{U}_i\in\mathscr{A}_{E_i}$,使得

$$V^s_{\mathscr{U}_i}(E_i) < V^s(E_i) + \frac{\text{X}}{2^i}$$

设$\mathscr{U} = \bigcup_i \mathscr{U}_i$,则$\mathscr{U}\in\mathscr{A}_{\bigcup_i E_i}$,则

$$V^s\bigcup_i E_i)\leq V^s_{\mathscr{U}}\bigcup_i E_i)\leq\sum_i V^s_{\mathscr{U}_i}(E_i)\leq\sum_i V^s(E_i) + \text{X}$$

故 V^s是可数次可加的.

以下证明 $H^s(E)\leq V^s(E)$.

任取$\mathscr{U}\in\mathscr{A}_E$,记

$$\mathscr{B} = \{B: \exists\ U\in\mathscr{U},\text{使得 }B = \overline{U}\}$$

其中,$\overline{U}$表示集合 U的闭包.显然,$\mathscr{B}\in\mathscr{A}_E$, $V^s_{\mathscr{B}}(E)\leq V^s_{\mathscr{U}}(E)$.因为$\mathscr{B}$是 E的 Vitali-覆盖,

根据 Vitali-覆盖定理,我们可以分以下(1),(2)两种情形讨论.

(1)对 $\forall X > 0, \exists W > 0, W \le X$,使得 $\mathscr{B}_W = \{B \in \mathscr{B}: 0 < |B| \le W\}$ 中存在互不相交的 $B_1, B_2, \cdots, B_n, \cdots$,使得 $\sum_i |B_i|^s < +\infty$,并且 $H^s(E - \bigcup_i B_i) = 0$.在这种情形下,存在 $W_n \to 0 (n \to \infty)$,使得 $\mathscr{B}_{W_n}$ 中存在可数个互不相交的成员 $B_1^n, B_2^n, \cdots$ 使得 $\sum_i |B_i^n|^s < +\infty$ 并且 $H^s(E - \bigcup_i B_i^n) = 0$.

我们有

$$H^s_{W_n}(E) \le H^s_{W_n}(E \cap \bigcup_i B_i^n) + H^s_{W_n}(E - \bigcup_i B_i^n).$$

因为

$$\bigcup_i B_i^n \supset E \cap \bigcup_i B_i^n, \ 0 < |B_i^n| \le W_n (i = 1, 2, \cdots),$$

$$H^s(E - \bigcup_i B_i^n) = \sup_{W > 0} H^s_W(E - \bigcup_i B_i^n)$$

所以

$$H^s_{W_n}(E) \le \sum_i |B_i^n|^s \le V^s_{\mathscr{B}}(E) \le V^s_{\mathscr{U}}(E)$$

故

$$H^s(E) \le V^s(E).$$

(2)存在 $X_0 > 0$,使得当 $0 < W < X_0$ 时,$\mathscr{B}_W$ 中存在可数个互不相交的成员 $B_1, B_2, \cdots$,使得 $\sum_i |B_i|^s = +\infty$.

在这种情形下,有 $H^s_W(E) \le \sum_i |B_i|^s \le V^s_{\mathscr{B}} \le V^s_{\mathscr{U}}(E)$.

综上所述,有 $H^s(E) \le V^s(E)$.

以下证明 $V^s(E) \le H^s(E)$.

(1)若 $H^s(E) = 0$,那么对 $\forall X > 0$,任取 $W_n \to 0 (n \to \infty)$,均有

$$0 = H^s_{W_n}(E) < \frac{X}{2^n} (n = 1, 2, \cdots)$$

根据 $H^s_W(E)$ 的定义可知,对每个 n,存在一个可数集族 $\mathscr{U}_n = \{U_i^n\}$,使得 $\mathscr{U}_n$ 中的成员满足:

$$\bigcup_i U_i^n \supset E, 0 < |U_i^n| \le W_n, U_i^n \cap E \ne \varnothing (i = 1, 2, \cdots)$$

并且

$$\sum_i |U_i^n|^s < \frac{X}{2^n}$$

设 $\mathscr{U} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathscr{U}_n$,则 $\mathscr{U} \in \mathscr{A}_E$.故有 $V^s(E) \le V^s_{\mathscr{U}}(E) \le X$,从而 $V^s(E) = 0$.

(2)不妨假定 $0 < H^s(E) < +\infty$.由文[1]的定理1.6可知,存在 G_W 型集 $G, G \supset E$,使得 $H^s(E) = H^s(G)$.因此,只需证明 $V^s(G) \le H^s(G)$.由文[1]定理1.5知 G 是 H^s-可测集.由引理1可知,存在 $G^* \subset G$,使得 $H^s(G - G^*) = 0$,并且对任意的 $x \in G^*$,有 $D^s_c(G, x) = 1$.从而可知,对任意的 $r > 0$ 以及任意的 $0 < U < 1$,存在一个集族 $\mathscr{U}_r^U$ 满足:

1)对任意的 $x \in G^*$,存在 $U \in \mathscr{U}_r^U$,使得 $x \in U, H^s(G \cap U) \ge U|U|^s$;

2)对任意的 $U \in \mathscr{U}_r^U$,有 $0 < |U| \le r, U \cap G^* \ne \varnothing$.

设

$$\mathscr{U}^U = \bigcup_{r > 0} \mathscr{U}_r^U$$

则

$$\mathscr{U}^U \in \mathscr{A}_{G^*}$$

因此有

$$V^s(G^*) \le V^s_{\mathscr{U}^U}(G^*) \leqslant \frac{1}{U} H^s(G)$$

由 U 的任意性可知,$V^s(G) \le H^s(G)$.再由(1)的结论及 V^s 是外测度可知

$$V^s(G^*) \leq V^s(G^*) + V^s(G - G^*) \leq H^s(G)$$

注 2 设 $E \subset R^n$. 令

$$\mathscr{A}^1_E = \{\mathscr{U}: \mathscr{U}\text{是 } E \text{的闭 Vitali-覆盖}\}; \mathscr{A}^2_E = \{\mathscr{U}: \mathscr{U}\text{是 } E \text{的闭凸 Vitali-覆盖}\};$$

$$V^s_1(E) = \inf\{V^s_{\mathscr{U}}(E): \mathscr{U} \in \mathscr{A}^1_E\}; V^s_2(E) = \inf\{V^s_{\mathscr{U}}(E): \mathscr{U} \in \mathscr{A}^2_E\}.$$

易知 V^s_1, V^s_2 是 R^n 上的外测度.

因为 $$H^s_W(E) = \inf\{\sum_i |U_i|^s: \bigcup_i U_i \supset E, 0 < |U_i| \leq W, U_i \text{是闭集}.\} =$$

$$\inf\{\sum_i |U_i|^s: \bigcup_i U_i \supset E, 0 < |U_i| \leq W, U_i \text{是闭凸集}.\},$$

又 $$D^s_c(G, x) = \lim_{r \to 0} \sup\left\{\frac{H^s(E \cap U)}{|U|^s}: U\text{是闭集}, x \in U, 0 < |U| \leq r\right\} =$$

$$\lim_{r \to 0} \sup\left\{\frac{H^s(E \cap U)}{|U|^s}: U\text{是闭集凸集}, x \in U, 0 < |U| \leq r.\right\}$$

那么和定理 1证明中的 (1)、(2)相仿,有

$$H^s(E) \geq V^s_1(E), H^s(E) \geq V^s_2(E)$$

据定理 1,对任意的 $E \subset R^n$, $0 \leq s < +\infty$,有

$$H^s(E) = V^s(E) = V^s_1(E) = V^s_2(E)$$

参 考 文 献

1 Tricot C. Two definition of fractional dimension. Math Proc Phil Soc, 1982, 91(1): 21- 74

2 Falconer K J. Fractal Geometry-mathematical Foundation and Application. England John Wiley & Sons Ltd, 1990. 25- 68

3 Taylor S J, Tricot C. Packing measure and its evaluation for a Brownian path. Trans Amer Math Soc, 1985, 288(2): 679- 699

4 Spear D W. Measurd and similarity. Advance in Mathematics, 1992, 91(2): 143- 157

5 Falconer K J. The Geometry of Fractal sets. Cambridge: Cambridge University Press, 1985. 1- 50

An Equivalent Difinition of the Hausdorff Measure

*Geng Xiangyi**

Abstract In this paper, an equivalent definition of the Hausdorff measure is given. By the equivalent difinition, the difference and connection between Hausdorff measure and Pack-ing measure are more clear.

Keywords Hausdorff measure, packing measure, Vitali-cover

* Department of Mathematics, Zhongshan University, Guangzhou 510275