

# 阻尼系统振动分析的复模态矩阵摄动法<sup>\*</sup>

徐伟华 刘济科

(中山大学应用力学与工程系, 广州 510275)

**摘要** 研究了阻尼系统振动分析的复模态矩阵摄动法, 推导了孤立特征值及重特征值情况的一阶、二阶摄动公式, 特别是通过引进 1 个非常简单的范化条件, 就完全确定了现有方法中的有关摄动项的不确定量, 并且给出了相应的算例.

**关键词** 阻尼系统, 复模态, 矩阵摄动法

**分类号** TH 113.1, O 32

除了阻尼矩阵满足一定的条件外, 有阻尼多自由度线性振动系统一般不再满足 Rayleigh-Caughey 阻尼在实模态变换下的对角化条件<sup>[1]</sup>, 此时进行振动分析就需要采用复模态理论. 然而, 在使用模态分析时, 已有的复模态摄动法并不能唯一确定特征向量的所有摄动项. 陈塑寰<sup>[2]</sup>通过假定 2 系数相等来确定它们, 在许多情况下这显然并不成立. 刘济科等<sup>[3]</sup>对此进行了讨论. 但文 [3] 结果只适合于孤立特征值情况, 不能处理实际中存在的重特征值情况, 且未推导二阶公式, 也未给出具体算例. 本文针对这些问题, 通过引进一个非常简单的范化条件, 完全确定了孤立、重特征值情况下的有关摄动项中的不确定量, 并导出了相应的一阶、二阶摄动公式. 算例表明, 本文方法能给出具有足够精度的摄动解, 而采用其它方法所得的结果误差较大.

## 1 基本方程

众所周知, 一个质量阵  $M$  刚度阵  $K$  及阻尼阵  $C$  是一般矩阵的多自由度线性振动系统, 引入状态变量后, 其自由振动的特征值问题可化成如下的标准广义特征值问题

$$K_0 x_0 = \lambda_{i0} M_0 x_0 \quad (i=1 \sim n) \quad (1)$$

其中,  $K_0, M_0$  是一般矩阵, 由  $M, K, C$  表示,  $\lambda_{i0}$  是特征值,  $x_0$  是相应的右特征向量. 选取比例系数,  $x_0$  可使满足范化条件  $x_0^T x_0 = 1 \quad (i=1 \sim n)$ . (1) 式的左特征值问题是

$$K_0^T y_0 = \lambda_{i0} M_0^T y_0 \quad (2)$$

左、右特征向量  $y_0, x_0$  满足双正交关系  $y_0^T M_0 x_0 = W_j \quad (i, j=1 \sim n)$  (3)

当结构参数变化后, 设  $M_0, K_0$  的改变量分别是  $X_M, X_K$ ,  $X$  是 1 个小参数, 则摄动系统的右、左特征值问题可分别表示成

\* 广东省自然科学基金 (960030) 和西安交通大学国家重点实验室开放研究基金资助项目

收稿日期: 1997-10-26 徐伟华, 女, 24 岁, 研究生

$$(K_{0+} \ XK_1)x_i = \lambda_i (M_{0+} \ XM_1)x_i \quad (K_{0+} \ XK_1)^T y_i = \lambda_i (M_{0+} \ XM_1)^T y_i \quad (4)$$

其中,  $\lambda_i$  是摄动系统的特征值,  $x_i, y_i$  分别是相应的右、左特征向量.

先讨论  $\lambda_{i0}$  是孤立特征值的情况. 将特征值和特征向量按小参数  $X$  展开, 得到

$$\begin{aligned} \lambda_i &= \lambda_{i0+} \ X\lambda_{i1+} \ X^2\lambda_{i2+} \ \dots, x_i = x_{i0+} \ Xx_{i1+} \ X^2x_{i2+} \ \dots, \\ y_i &= y_{i0+} \ Xy_{i1+} \ X^2y_{i2+} \ \dots \end{aligned} \quad (5)$$

上式代入 (4) 式, 略去  $O(X^3)$  项, 比较  $X$  的同次幂系数, 可得

$$\begin{aligned} X: K\alpha x_{i1+} - K_1 x_{i0} &= \lambda_{i0} M\alpha x_{i1+} + \lambda_{i0} M_1 x_{i0+} + \lambda_{i1} M\alpha x_{i0} \\ X: K\alpha x_{i2+} - K_1 x_{i1} &= \lambda_{i0} M\alpha x_{i2+} + \lambda_{i0} M_1 x_{i1+} + \lambda_{i1} M\alpha x_{i1+} + \lambda_{i1} M_1 x_{i0+} + \lambda_{i2} M\alpha x_{i0} \end{aligned} \quad (6)$$

(5) 式应满足  $X$  的同次幂系数

$$\begin{aligned} X: K_0^T y_{i1+} - K_1^T y_{i0} &= \lambda_{i0} M_0^T y_{i0+} + \lambda_{i0} M_1^T y_{i0+} + \lambda_{i1} M_0^T y_{i0} \\ X: K_0^T y_{i2+} - K_1^T y_{i1} &= \lambda_{i0} M_0^T y_{i2+} + \lambda_{i0} M_1^T y_{i1+} + \lambda_{i1} M_0^T y_{i1+} + \lambda_{i1} M_1^T y_{i0+} + \lambda_{i2} M_0^T y_{i0} \end{aligned} \quad (7)$$

摄动系统相应的范化条件为  $x_i^T x_i = 1 \quad (i = 1 \sim n)$ , 应满足

$$X: x_{i1}^T x_{i0} + x_{i0}^T x_{i1} = 0, \quad X^2: x_{i2}^T x_{i0} + x_{i1}^T x_{i1} + x_{i0}^T x_{i2} = 0 \quad (8)$$

摄动系统的特征向量  $x_i, y_i$  满足的双正交条件, 也应有

$$\begin{aligned} X: y_{i0}^T M\alpha x_{i1+} + y_{i1}^T M\alpha x_{i0+} + y_{i0}^T M_1 x_{i0} &= 0 \\ X^2: y_{i0}^T M\alpha x_{i2+} + y_{i1}^T M\alpha x_{i1+} + y_{i2}^T M\alpha x_{i0+} + y_{i0}^T M_1 x_{i1+} + y_{i1}^T M_1 x_{i0} &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

## 2 孤立特征值情况的摄动公式

由展开定理, 将  $x_{i1}$  按复模态  $x_{i0}$  展开:  $x_{i1} = \sum_{j=1}^n c_{j1} x_{j0} \quad (c_{j1} \text{ 为待定系数})$ , 代入 (6) 式第 1 式, 左乘  $y_{j0}^T$ , 利用 (3) 式, 得

$$\begin{aligned} \lambda_{i1} &= y_{j0}^T (K_1 - \lambda_{i0} M_1) x_{i0} = y_{j0}^T (K_1 - \lambda_{i0} M_1) x_{i0} \quad (i = 1 \sim n) \\ c_{j1} &= \frac{y_{j0}^T (K_1 - \lambda_{i0} M_1) x_{i0}}{\lambda_{i0} - \lambda_{j0}} \quad (i \neq j) \end{aligned} \quad (10)$$

用  $y_{i0}^T M_0$  左乘  $x_{i1}$  的表达式, 利用 (3) 式, 有  $c_{i1} = y_{i0}^T M_0 x_{i1}$ ; 将  $y_i$  按相应的左特征向量展开  $y_{i1} = \sum_{j=1}^n d_{j1} y_{j0}$ , 可得:  $d_{i1} = y_{i1}^T M\alpha x_{i0}$ . 再由 (9) 式第 1 式, 得

$$c_{i1+} - d_{i1} = -y_{i0}^T M_1 x_{i0} \quad (11)$$

这是个不定方程, 文 [2] 通过假定来  $a_{i1} = d_{i1}$  确定这 2 个系数, 显然是不成立的. 现通过本文引进的范化条件 (8) 式来确定  $c_{i1}, d_{i1}$ . 因为  $x_{i1}^T x_{i0}$  是数, 则由 (8) 式得  $x_{i1}^T x_{i0} = 0$ , 将  $x_{i1}$  代入该式, 由  $x_{i1}^T x_{i0} = 0$  可得  $c_{i1} = -\sum_{j=1, j \neq i}^n c_{j1} x_{j0}^T x_{i0} = 0$ . 该式代入 (11) 式得  $d_{i1} = \sum_{j=1, j \neq i}^n c_{j1} x_{j0}^T x_{i0} - y_{i0}^T M_1 x_{i0}$ .  $y_{i1}$  代入 (6) 式, 右乘  $x_{j0}$ , 并利用 (3) 式可得  $d_{j1} = y_{i0}^T (K_1 - \lambda_{i0} M_1) x_{j0} / (\lambda_{i0} - \lambda_{j0}) \quad (i \neq j)$ . 联合以上各式, 即可得到全部一阶公式 ( $i = 1 \sim n$ ).

$$\begin{aligned} \lambda_{i1} &= y_{i0}^T (K_1 - \lambda_{i0} M_1) x_{i0} \\ x_{i1} &= \sum_{j=1, j \neq i}^n [y_{j0}^T (K_1 - \lambda_{i0} M_1) x_{i0}] (x_{j0} - x_{i0}^T \alpha x_{i0}) \backslash (\lambda_{i0} - \lambda_{j0}) \\ y_{i1} &= \sum_{j=1, j \neq i}^n [y_{j0}^T (K_1 - \lambda_{i0} M_1) x_{i0}] y_{j0} \backslash (\lambda_{i0} - \lambda_{j0}) + \end{aligned} \quad (12)$$

$$\left\{ \sum_{j=1, j \neq i}^n \left[ \mathbf{y}_{j0}^T (\mathbf{K}_1 - \lambda_{i0} \mathbf{M}_1) \mathbf{x}_{i0} \right] \mathbf{x}_{j0}^T \alpha_{i0} \setminus (\lambda_{i0} - \lambda_{j0}) - \mathbf{y}_{j0}^T \mathbf{M}_1 \mathbf{x}_{i0} \right\} \mathbf{y}_{i0}$$

为了确定  $\lambda_{i2}$ ,  $\mathbf{x}_{i2}$ ,  $\mathbf{y}_{i2}$ , 先将按原系统的特征向量  $\mathbf{x}_{i0}$ ,  $\mathbf{y}_{i0}$  展开:  $\mathbf{x}_{i2} = \sum_{j=1}^n \sigma_{j2} \mathbf{x}_{j0}$ ,

$$\mathbf{y}_{i2} = \sum_{j=1}^n d_{j2} \mathbf{y}_{j0} (i=1 \sim n). \text{ 其中, } \sigma_{j2}, d_{j2} (j=1 \sim n) \text{ 是待定复系数.}$$

与前面推导完全类似, 可得全部二阶摄动公式

$$\lambda_{i2} = \mathbf{y}_{i0}^T (\mathbf{K}_1 - \lambda_{i0} \mathbf{M}_1 - \lambda_{i1} \mathbf{M}_0) \mathbf{x}_{i1} - \lambda_{i1} \mathbf{y}_{i0}^T \mathbf{M}_1 \mathbf{x}_{i0} \quad (13)$$

$$\mathbf{x}_{i2} = \sum_{j=1, j \neq i}^n \mathbf{y}_{j0}^T \left[ (\mathbf{K}_1 - \lambda_{i0} \mathbf{M}_1 - \lambda_{i1} \mathbf{M}_0) \mathbf{x}_{i1} - \lambda_{i1} \mathbf{M}_1 \mathbf{x}_{i0} \right] (\mathbf{x}_{j0} - \mathbf{x}_{j0}^T \alpha_{i0} \mathbf{x}_{i0}) \setminus (\lambda_{i0} - \lambda_{j0}) - \mathbf{x}_{i1}^T \mathbf{x}_{i1} / 2$$

$$\mathbf{y}_{i2} = \sum_{j=1, j \neq i}^n \left[ \mathbf{y}_{j1}^T (\mathbf{K}_1 - \lambda_{i0} \mathbf{M}_1 - \lambda_{i1} \mathbf{M}_0) \mathbf{x}_{j0} - \lambda_{i1} \mathbf{y}_{j0}^T \mathbf{M}_1 \mathbf{x}_{i0} \right] \mathbf{y}_{j0} \setminus (\lambda_{i0} - \lambda_{j0}) + \sum_{j=1, j \neq i}^n \mathbf{y}_{j0}^T \left[ (\mathbf{K}_1 - \lambda_{i0} \mathbf{M}_1 - \lambda_{i1} \mathbf{M}_0) \mathbf{x}_{i1} - \lambda_{i1} \mathbf{M}_1 \mathbf{x}_{i0} \right] \mathbf{x}_{j0}^T \alpha_{i0} \mathbf{y}_{j0} \setminus (\lambda_{i0} - \lambda_{j0}) + \left[ \mathbf{x}_{i1}^T \mathbf{x}_{i1} / 2 - \mathbf{y}_{i1}^T \mathbf{M}_0 \mathbf{x}_{i1} - \mathbf{y}_{i0}^T \mathbf{M}_1 \mathbf{x}_{i1} - \mathbf{y}_{i1}^T \mathbf{M}_1 \mathbf{x}_{i0} \right] \mathbf{y}_{i0}$$

### 3 重特征值情况的复模态矩阵摄动公式

设  $\lambda_{i0}$  为  $m (m > 1)$  重特征值, 即  $\lambda_{i0} = \lambda_{i0} = \lambda_{(i+1,0)} = \dots = \lambda_{(i+m-1,0)}$ , 而且能求出两两正交的左、右特征向量  $\mathbf{y}_{j0}$ ,  $\mathbf{x}_{j0}$ , ( $j=1, i+1, \dots, i+m-1$ , 为简单起见, 以下略去此说明). 根据特征值理论,  $\mathbf{y}_{j0}$ ,  $\mathbf{x}_{j0}$  的线性组合仍是对应于  $\lambda_{i0}$  的特征向量, 即

$$\mathbf{y}_{i0}^{(k)} = \sum_{j=i}^{i+m-1} p_j^{(k)} \mathbf{y}_{j0} = \Phi_y \mathbf{p}^{(k)}, \quad \mathbf{x}_{i0}^{(k)} = \sum_{j=i}^{i+m-1} q_j^{(k)} \mathbf{x}_{j0} = \Phi_x \mathbf{q}^{(k)} \quad (14)$$

$p_j^{(k)}$ ,  $q_j^{(k)}$  是待定系数, 且  $\Phi_y = [\mathbf{y}_{i0}, \mathbf{y}_{(i+1,0)}, \dots, \mathbf{y}_{(i+m-1,0)}]$ ,  $\mathbf{p}^{(k)} = [p_i^{(k)}, p_{i+1}^{(k)}, \dots, p_{i+m-1}^{(k)}]$ ,  $\Phi_x = [\mathbf{x}_{i0}, \mathbf{x}_{(i+1,0)}, \dots, \mathbf{x}_{(i+m-1,0)}]$ ,  $\mathbf{q}^{(k)} = [q_i^{(k)}, q_{i+1}^{(k)}, \dots, q_{i+m-1}^{(k)}]$ .

根据 (14) 式有

$$\lambda_j = \lambda_{j0} + \sum_{i+1}^m \lambda_{j2} + \dots, \mathbf{x}_j = \mathbf{x}_{j0} + \sum_{i+1}^m \mathbf{x}_{j2} + \dots, \mathbf{y}_j = \mathbf{y}_{j0} + \sum_{i+1}^m \mathbf{y}_{j2} + \dots \quad (15)$$

对比 (15), (5) 式易得, 二者的区别在于右端第一项, 于是将  $\mathbf{x}_{i1}$ ,  $\mathbf{y}_{i1}$  代入 (6) 式后 (其中的相关项及下标作相应的改动), 用  $\mathbf{y}_{i0}^T$  左乘所得的式子, 利用 (3) 式, 可得 1 个  $m$  阶的标准特征值问题

$$\mathbf{A} \mathbf{Q} = \mathbf{Q} \Lambda \quad (16)$$

同理, 可得与 (16) 相应的标准特征值问题

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} = \mathbf{P} \Lambda \quad (17)$$

其中,  $\mathbf{A}_{(m,m)} = \Phi_y^T (\mathbf{K}_1 - \lambda_{i0} \mathbf{M}_1) \Phi_x$ ,  $\lambda_0 = \lambda_{i0} = \lambda_{(i+1,0)} = \dots = \lambda_{(i+m-1,0)}$ ,

$$\mathbf{Q}_{(m,m)} = [\mathbf{q}^{(i)}, \mathbf{q}^{(i+1)}, \dots, \mathbf{q}^{(i+m-1)}], \quad \mathbf{P}_{(m,m)} = [\mathbf{p}^{(i)}, \mathbf{p}^{(i+1)}, \dots, \mathbf{p}^{(i+m-1)}],$$

$$\Lambda_{(m,m)} = \text{diag} [\lambda_{i1}, \lambda_{(i+1,1)}, \dots, \lambda_{(i+m-1,1)}]$$

将 (15) 式代入规范化条件, 利用 (4) 式, 不难推得

$$\mathbf{q}^{(j)T} \Phi_x \Phi_x \mathbf{q}^{(j)} = 1, \quad \mathbf{p}^{(j)T} \mathbf{q}^{(j)} = 1 \quad (18)$$

事实上, (16), (17) 式分别是相应于原系统的新的  $m$  阶标准右、左特征值问题, (18) 式分别是相应的规范化条件. 解之可得  $m$  个特征值  $\lambda_{i1}, \dots, \lambda_{(i+m-1,1)}$ , 即求得了与重特征值相应的  $m$  个特征值的一阶摄动解  $\lambda_{i1}$ ; 同时还唯一确定了  $m$  个右特征向量  $\mathbf{q}^{(i)}, \dots, \mathbf{q}^{(i+m-1)}$ , 及左

特征向量  $p^{(i)}, \dots, p^{(i+m-1)}$ . 考虑到 (14) 式, 实质上就重新确定了原系统中与重特征值  $\lambda_0$  相应的特征向量  $x_0^{(j)}, y_0^{(j)}$ .

确定了 (15) 式中  $x_0^{(j)}, y_0^{(j)}$  后, 其它推导孤立特征值的摄动公式推导. 前已指出, 式 (15) 与式 (5) 相似, 故在一, 二阶摄动公式 (12), (13) 中, 当  $j = i, i+1, \dots, i+m-1$  时, 必须将 (12), (13) 式中的  $x_{j0}$  (或  $x_{k0}$ ) 换成  $x_0^{(j)}$  (或  $x_0^{(k)}$ ),  $y_{j0}$  (或  $y_{k0}$ )  $y_0^{(j)}$  换成 (或  $y_0^{(k)}$ ), 而  $x_0^{(j)}$  (或  $x_0^{(k)}$ ),  $y_0^{(j)}$  (或  $y_0^{(k)}$ ), ( $j, k = i, i+1, \dots, i+m-1$ ) 分别由 (14) 的第 1, 2 式给出.

### 4 算例

算例 1 考虑质量 ( $m$ ) 弹簧 ( $k$ ) 阻尼 ( $c$ ) 系统, 振动方程是  $m\ddot{q} + c\dot{q} + kq = 0$ , 引入状态变量  $x = [\dot{q}, q]^T$ , 得  $K\dot{x} = M\ddot{x}$ , 其特征值为  $\lambda_{10} = -0.25 + 0.968245i, \lambda_{20} = -0.25 - 0.968245i$ , 属孤立特征值情况. 设仅弹簧刚度有扰动  $\Delta k_1$ , 取  $m = k = 1, c = 0.5, \Delta k_1 = -0.1$  进行计算. 为节省篇幅, 仅列出特征值及相应的右特征向量进行比较 (见表 1).

表 1 孤立特征值情况的摄动系统的计算结果比较

Tab. 1 Comparison of eigensolutions of the perturbed system with distinct eigenvalues

	精确解	本文方法 (一阶)	本文方法 (二阶)
特征值	$-0.25 \pm 1.01858i$	$-0.25 \pm 1.01989i$	$-0.25 \pm 1.01851i$
右特征向量	$-1.23716 \pm 0.79165i$	$-1.25220 \pm 0.80829i$	$-1.23968 \pm 0.78905i$
文 [2] 方法 (一阶)	$1.01423 \pm 0.96566i$	$1.02859 \pm 0.98150i$	$1.01160 \pm 0.96802i$
文 [2] 方法 (二阶)			
特征值	$-0.25 \pm 1.01989i$	$-0.25 \pm 1.01851i$	
右特征向量	$-1.13294 \pm 0.90067i$	$-1.13254 \pm 0.89913i$	
向量	$1.08822 \pm 0.84293i$	$1.0902 \pm 0.84447i$	

算例 2 考虑图 1 所示的系统, 振动方程是: 
$$\begin{cases} m_1\ddot{q}_1 + c_1\dot{q}_1 + (k_1 + k)q_1 - kq_2 = 0 \\ m_2\ddot{q}_2 + c_2\dot{q}_2 + (k_2 + k)q_2 - kq_1 = 0 \end{cases}$$

引入状态变量  $x = [\dot{q}_1, q_1, \dot{q}_2, q_2]^T$ , 可得  $K\dot{x} = M\ddot{x}$ , 相应的特征值问题是  $Kx = \lambda Mx, K^T y = \lambda M^T y, i = 1 \sim 4$ . 若称  $k = 0$  为原系统, 即  $K_0 = K(k = 0)$ , 记  $K = K_0 + \Delta K_1, M = M_0 + \Delta M_1, k = 0$  时, 系统有 2 对重特征值  $\lambda_{10} = \lambda_{20} = -0.25 + 0.968245i, \lambda_{30} = \lambda_{40} = -0.25 - 0.968245i$ . 取  $m = k_1 = k_2 = 1, c = 0.5, k = 0.1$ , 按重特征值情况的复模态矩阵摄动公式进行计算, 表 2 列出了部分计算结果.

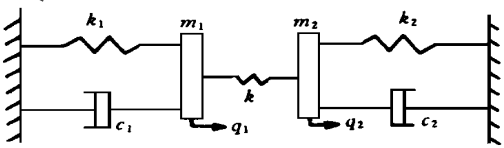


图 1 算例 2 中具有重特征值的两自由度系统  
Fig. 1 Two degree-of-freedom system with repeated eigenvalues for example 2

从表 1, 表 2 可以看出, 本文方法的一阶近似解已具有足够的精度, 二阶近似解基本上与精确解相同. 文 [2] 的方法因引入了不合理的假定 (如  $a_{ii} = d_{ii}$  等), 所以特征向量的一阶摄动解的计算误差相对较大, 而其二阶摄动解则更远离精确解, 相信若计算到三阶, 本文方法必能给出更精确的解, 而文 [2] 的方法给出的解必然会更不合理. 当然, 由于文 [2] 在计算一阶特征值时并未用到特征向量的摄动解, 所以计算结果与本文的相同, 但二阶不是如此 (误差较大).

表 2 重特征值情况的摄动系统的计算结果比较

Tab. 2 Comparison of eigensolutions of the perturbed system with repeated eigenvalues

	精确解	本文方法 (一阶)	本文方法 (二阶)
特征值	$-0.25 \pm 1.0665i$	$-0.25 \pm 1.0715i$	$-0.25 \pm 1.0660i$
	$0.18360 \pm 0.15959i$	$0.1834 \pm 0.14969i$	$0.18442 \pm 0.16058i$
左特征	$-0.1243 \pm 0.23571i$	$-0.12017 \pm 0.23134i$	$-0.1237 \pm 0.23678i$
向量	$-0.18360 \mp 0.15959i$	$-0.18341 \mp 0.14969i$	$-0.18442 \mp 0.16058i$
	$0.1243 \mp 0.23571i$	$0.12017 \mp 0.23134i$	$0.12371 \mp 0.23678i$
	文 [2] 方法 (一阶)	文 [2] 方法 (二阶)	
特征值	$-0.25 \pm 1.0715i$	$-0.25 \pm 1.0715i$	
	$0.14968 \pm 0.19324i$	$0.1508 \pm 0.19469i$	
左特征	$-0.17076 \pm 0.20957i$	$-0.16964 \pm 0.20928i$	
向量	$-0.14968 \mp 0.19324i$	$-0.15081 \mp 0.19469i$	
	$0.17076 \mp 0.20957i$	$0.16964 \mp 0.20928i$	

## 参 考 文 献

- 1 Caughey T K, O'Kelly M E J. Classical normal modes in damped linear dynamic systems. *Journal of Applied Mechanics*, 1965 (32): 583-592
- 2 陈塑寰. 结构振动分析的矩阵摄动理论. 重庆: 重庆出版社, 1991. 55~62
- 3 刘济科, 张宪民, 孟光. 对复模态矩阵摄动法的补充. *航空动力学报*, 1996, 11 (1): 97-99

## Matrix Perturbation Method of Complex Modes in Vibration Analysis of Damped System

*Xu Weihua*\*    *Liu Jike*

**Abstract** A matrix perturbation method of complex modes in vibration analysis of damped system is studied. By introducing a simple normalization condition, the perturbation terms of eigenvectors can be determined conveniently and uniquely. And the perturbation formulas of the first and second order are derived for the cases of distinct and repeated complex eigenvalues. Illustrative examples are given to show that this perturbation method is able to give approximate results extremely close to exact results.

**Keywords** damped system, complex modes, perturbation

\* Department of Applied Mechanics and Engineering, Zhongshan University, Guangzhou 510275, China