中山大学学报 (自然科学版)
第 37卷 第 2期 ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM Vol. 37 No. 2
1998年 3月 UNIVERSITATIS SUNYATSENI Mar. 1998

有限型子转移的混沌集的 Hausdorff维数*

贾保国 耿祥义
(中山大学物理学系, 广州 510275) (大连铁道学院基础科学部)

摘 要 有限型子转移 e_A: $E_A \to E_A$ (其中 A是本原方阵), 存在 e_A的混沌集 D_n, $\dim_H D_n = d_n$, 并且当 n趋于无穷时, d_n趋于 E_A 的 Hausdorff维数.

关键词 有限型子转移, 本原矩阵, Li-Yorke混沌集, Hausdorff-维数
分类号 O 189.1

设 $N \geqslant 2$, 记 $S = \{0, 1, \cdots, N-1\}$ 并赋以离散拓扑. S上的单边符号空间记作 $E_N = \{x = (x_0 x_1 \cdots) | x_i \in S, \forall i \geqslant 0\}$. 在积拓扑下, E_N 是紧致可度量空间. 本文恒取与它的拓扑相容的一个度量为

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1/N^k & x \neq y, k = \min\{n | x_n \neq y_n\} \end{cases}$$

其中, $x = (x_0 x_1 \cdots)$, $y = (y_0 y_1 \cdots) \in E_N$. 定义映射

$$e: E_N \to E_N, \quad e: (x_0 x_1 \cdots) \to (x_1 x_2 \cdots)$$

设 $A = (a_{ij})$为 $N \times N$ 阶 (0, 1)-方阵, 并总假设它的每行和每列都至少有 1个元素为 1. 记

$$E_A = \{x = (x_0 x_1 \cdots) \in E_N | a_{x_i x_{i+1}} = 1, \forall i \geqslant 0\}$$

E_A 是 E_N 的一个紧致子集且对 e不变, (E_A, e_A)叫做有限型子转移. 其中 e_A是 e在 E_A 上的限制.

1 定义和有关定理

设 $A = (a_{ij})$为 $N \times N$ 阶 (0, 1)-方阵, $N \geqslant 2$.

定义 1 记 $A^n = \left(a_{ij}^{(n)}\right)$, $\forall n \geqslant 2$. 称 A是不可约的, 若对任意 $0 \leqslant i, j < N$, 存在 $n > 0$, 使得 $a_{ij}^{(n)} > 0$. 称 A是本原的, 若存在 $n > 0$, 使得对 $\forall 0 \leqslant i, j < N$, $a_{ij}^{(n)} > 0$.

S中的元素组成的一个有限序列 $(i_1 i_2 \cdots i_m)$称为关于方阵 A的一条道路,如果 $a_{i_k i_{k+1}} = 1$, $(k = 1, 2, \cdots, m-1)$.

引理 1[1,2] 设 A不可约, 则

1) A有一个最大的非负特征值, 记作 $d(A)$, 叫做 A的谱半径.

2) 对应 $d(A)$, A有正的左和右特征向量 $u^T = (u_0, \cdots, u_{N-1})$, $v^T = (v_0, \cdots, v_{N-1})$且

* 广东省博士后启动基金资助项目
收稿日期: 1997-04-01 贾保国, 男, 33岁, 博士后

$$u\cdot v=\sum_{i=0}^{N-1}u_iv_i=1$$

3) σ_A的拓扑熵和Σ_A的 Hausdorff维数分别为 $h(\sigma_A)=\lg\rho(A)$, $\dim_H(\Sigma_A)=\log_N\rho(A)$

4) 若 $A=(a_{ij})$是非周期的,则 $\lim\limits_{n\to\infty}[a_{ij}^{(n)}/\rho(A)^n]=u_jv_i\quad(\forall\ 0\leqslant i,j<N)$

引理 2[2] 设 $i_0,i_{n-1}\in S$, $n>0$,则长度为 n的形如 $[i_0\cdots i_{n-1}]_A$的Σ_A的相对柱形的基数为 $a_{i_0i_{n-1}}^{(n-1)}$.

定义 2[3] 设(X,ρ)是一个度量空间, $f: X\to X$是一个连续映射,集合 C称为对映射 f而言是混沌的,如果对于 C的任意子集 C_1和任意连续映射 $F: C_1\to X$,存在一个严格递增的正整数序列$\{r_n\}$,使得

$$\lim_{n\to\infty}f^{r_n}(x)=F(x),\ \forall\ x\in C_1$$

定义 3 设(X,ρ)是一个度量空间, $f: X\to X$是一个连续映射,非空集合 $C\subset X$称为对于映射 f而言是 Li-Yorke混沌的,如果对任意 $x,y\in C$, $x\neq y$,有

$$\lim_{n\to\infty}\inf\rho(f^n(x),f^n(y))=0;\qquad \lim_{n\to\infty}\sup\rho(f^n(x),f^n(y))>0$$

由文[3]知道,每一个混沌集合都是 Li-Yorke混沌集合.

引理 3[3] 对于符号空间Σ_A上的转移自映射 $\sigma:\Sigma_A\to\Sigma_A$而言, Σ_A中存在 1个 Hausdorff维数为 1的混沌集合.

引理 4[4] 设(X,ρ_1), (Y,ρ_2)是紧致度量空间,若存在 $c_1,c_2>0$,使得 $f: X\to Y$满足

$$c_1\rho_1(x,y)\leqslant\rho_2(f(x),f(y))\leqslant c_2\rho_1(x,y)\quad(\forall\ x,y\in X)$$

则对于 X的任一子集 C_2,有 $\dim_H^{\rho_1}(C_2)=\dim_H^{\rho_2}(C_2)$

其中, $\dim_H^{\rho_1}(C)$表示在度量ρ_1之下集合 C的 Hausdorff维数.

2 主要定理

定理 1 设 $A=(a_{ij})$为 N阶本原矩阵,则存在(Σ_A,σ_A)的 Li-Yorke混沌集 D_n, $\dim_H^{\rho}(D_n)=d_n$,并且 $\lim\limits_{n\to\infty}d_n=\log_N\rho(A)$

证明 设 $a_{i_0j_0}=1$,因为 A是本原矩阵,故存在正整数 p,使得当 $n\geqslant p$时,有 $a_{j_0i_0}^{(n)}>0$. 任取 $n\geqslant p$,由引理 2知,一共存在 $a_{j_0i_0}^{(n)}$个长度为 $n+1$,起点为 j_0,终点为 i_0的道路,将这 $a_{j_0i_0}^{(n)}$个道路分别记作 $T_1,T_2,\cdots,T_{a_{j_0i_0}^{(n)}}$.设

$$B_n=\{T_1,T_2,\cdots,T_{a_{j_0i_0}^{(n)}}\}$$

赋予 B_n离散拓扑,则积空间

$$\Sigma(B_n)=\{x=(x_0x_1\cdots)\mid x_i\in B_n,\forall\ i\geqslant 0\}$$

是紧致可度量空间,取$\Sigma(B_n)$上的一个相容度量$\rho_1(x,y)$如下

$$\rho_1(x,y)=\begin{cases}0 & x=y\\ \left(1/a_{j_0i_0}^{(n)}\right)^k & x\neq y,k=\min\{l\geqslant 0\mid x_l\neq y_l\}\end{cases}$$

其中, $x=(x_0x_1\cdots)$, $y=(y_0y_1\cdots)\in\Sigma(B_n)$.

由引理 3知,在度量ρ_1之下, $\Sigma(B_n)$中存在$\sigma_{(B_n)}:\Sigma(B_n)\to\Sigma(B_n)$的 Li-Yorke混沌集 C_n,并且 $\dim_H^{\rho_1}(C_n)=1$.

定义$\Sigma(B_n)$上的另 1个相容度量ρ_2如下

$$d_2(x,y)=\begin{cases}0 & x=y\\ \left(1/N\right)^{(n+1)k} & x\neq y,k=\min\{l\geqslant 0\mid x_l\neq y_l\}\end{cases}$$

其中, $x=(x_0x_1\cdots)$, $y=(y_0y_1\cdots)\in\Sigma(B_n)$.

易知[4], $d_2(x,y)=d_1(x,y)^{(n+1)\lg N/\lg a^{(n)}_{j_0i_0}}$, $\dim_H^{d_2}(C_n)=\lg a^{(n)}_{j_0i_0}/[(n+1)\lg N]$. 定义映射 $f:\Sigma(B_n)\rightarrow\Sigma_A$, $f(x)=\left(x_1^{(0)}x_2^{(0)}\cdots x_{(n+1)}^{(0)}x_1^{(1)}x_2^{(1)}\cdots x_{(n+1)}^{(1)}\cdots x_1^{(i)}x_2^{(i)}\cdots x_{(n+1)}^{(i)}\cdots\right)$.
其中, $x=(x_0x_1\cdots x_i\cdots)\in\Sigma(B_n)$, $x_i=\left(x_1^{(i)}x_2^{(i)}\cdots x_{(n+1)}^{(i)}\right)$. 由 $a_{i_0j_0}=1$知 $f(x)\in\Sigma_A$. 因此有下列不等式

$$\left(1/N\right)^{(n+1)}d_2(x,y)=\left(1/N\right)^{(n+1)(k+1)}\leqslant d(f(x),f(y))\leqslant\left(1/N\right)^{(n+1)k}=d_2(x,y)$$

设 $D_n=f(C_n)$. 易知 D_n 是 $\sigma_A:\Sigma_A\rightarrow\Sigma_A$ 的 Li-Yorke混沌集, 由引理 4可知

$$\dim_H^d(D_n)=d_n=[\lg a^{(n)}_{j_0i_0}/(n+1)\lg N]$$

即
$$a^{(n)}_{j_0i_0}=N^{(n+1)d_n}$$

注意到 $d(A)^{-n}=N^{-n\log_N d(A)}$, 从而由引理 1得

$$\lim_{n\rightarrow\infty}N^{(n+1)(d_n-\log_N d(A))}=\lim_{n\rightarrow\infty}d(A)^{-(n+1)}a^{(n)}_{j_0i_0}=\frac{u_{i0}v_{j0}}{d(A)}>0$$

故
$$\lim_{n\rightarrow\infty}(n+1)(d_n-\log_N d(A))=\lim_{n\rightarrow\infty}\log_N N^{(n+1)(d_n-\log_N d(A))}=\log_N\frac{u_{i0}v_{j0}}{d(A)}$$

从而
$$\lim_{n\rightarrow\infty}(d_n-\log_N d(A))=\lim_{n\rightarrow\infty}[(n+1)(d_n-\log_N d(A))]\lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{n+1}=0$$

即存在 (Σ_A,σ_A) 的 Li-Yorke混沌集合 D_n, $\dim_H^d(D_n)=d_n$, 且 $\lim_{n\rightarrow\infty}d_n=\log_N d(A)$.

注　在上面定理的假设下, 由文 [5]知, $d(A)>1$, 从而当 n充分大时, $d_n>0$, 故此时 D_n 为 $\sigma:\Sigma_A\rightarrow\Sigma_A$ 的不可数的 Li-Yorke混沌集.

致谢　感谢导师周作领教授的热心指导.

参 考 文 献

1　Kenyon R, Reres Y. Intersecting random translates of invariant Cantor sets. Invent Math, 1991, 104 601～ 629

2　Walters P. An introduction to ergodic theory. New York: Springer-Verlag, 1982. 1～ 18

3　熊金城. 符号空间转移自映射混沌集合的 Hausdorff维数. 中国科学 (A), 1995, 25(1): 1～ 11

4　Falconer K. Fractal geometry. England: Wiley, 1990. 25～ 35

5　周作领. 转移与子转移. 数学季刊, 1991, 6(2): 44～ 55

The Hausdorff Dimension of Chaos Sets of the Finite Sub-Shift System

Jia Baoguo[*]　*Geng Xiangyi*

Abstract　Considers the Hausdorff dimension of chaos sets of the sub-shift system (Σ_A,σ_A), where A is a primitive matrix, and proves that there exists chaos sets D_n of Σ_A such that $\lim_{n\rightarrow\infty}\dim_H(D_n)$ equals the Hausdorff dimension of the space Σ_A.

Keywords　the subshift of finite type, primitive matrix, Li-Yorke chaos set, Hausdorff dimension

* Department of Physics, Zhongshan University, Guangzhou 510275, China