中山大学学报 (自然科学版)
第 37卷 第 4期 ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM Vol. 37 No. 4
1998年 7月 UNIVERSITATIS SUNYATSENI Jul. 1998

提升格式和双正交小波 Riesz基*

周 先 波
(中山大学 数学系 , 广 州 510275)

摘 要 证明了提升格式保持小波对称性的定理; 从一组不能生成 $L^2(R)$ 对偶 Riesz基的滤波出发, 利用提升格式, 得到一组新的双正交滤波集, 并证明它们生成 $L^2(R)$ 的双正交紧支小波 Riesz基.

关键词 提升格式, 对称性, 双正交滤波, 小波 Riesz基
分类号 O 174.2

提升格式是由 1个较简单的多尺度分析出发得到所需性质多尺度分析 (MRA) 的 1种新的小波构造方法,本质上利用了尺度函数相同的多尺度分析之间的相互关系[1,2]. 最初它是应第 2代小波的构造之需而产生[2], 在第 1代小波 (即经典小波, 以 Fourier变换为工具) 方面也有重要应用[1]. 目前, 在提升格式和小波对称性方面还没有专门讨论. 本文对这一问题先给出小波和尺度函数集同滤波函数集在对称性方面的相互关系, 再证明提升后的滤波保持原有对称性的充要条件定理, 然后对文 [3] 中的一个不能生成 $L^2(R)$紧支小波 Riesz基的滤波进行提升, 得到 1组新的双正交滤波集, 并证明它们恰好生成 $L^2(R)$的双正交的紧支对偶小波 Riesz基.

1 双正交滤波与提升格式

设双正交滤波函数集 (简称滤波集) 为 $\{h(k), \tilde{h}(k), g(k), \tilde{g}(k)\}$, 对应的双正交小波函数和尺度函数集 (简称函数集) 为 $\{h(x), \tilde{h}(x), j(x), \tilde{j}(x)\}$, 它们分别生成双正交的多尺度分析 $\{V_j\}$, $\{\tilde{V}_j\}$. 二尺度关系是

$$h(x) = 2\sum_k h_k h(2x-k);\quad \tilde{h}(x) = 2\sum_k \tilde{h}_k \tilde{h}(2x-k)$$

设 $\tilde{h}(0) = \hat{\tilde{h}}(0) = 0$, 则由二尺度方程有

$$\hat{h}(k) = \prod_{j=1}^{\infty} h(2^{-j}k),\quad \hat{\tilde{h}}(w) = \prod_{j=1}^{\infty} \tilde{h}(2^{-j}k) \tag{1}$$

引理 1[4,5] 设 h, $\tilde{h}$ 由式 (1) 而定, 则 $h, \tilde{h} \in L^2(R)$ 且 $< h, \tilde{h}(\circ - l) > = W \Leftrightarrow$

$$\overline{h(k)}\tilde{h}(k) + \overline{h(k+\pi)}\tilde{h}(k+\pi) = 1, h(0) = \tilde{h}(0) = 1 \tag{2}$$

以及 1是转移算子 T_0, $\tilde{T}_0$ 的非退化特征值, 并且其不变三角多项式是严格正的, 其中

* 广东省自然科学基金 (960018) 资助项目
收稿日期: 1997-12-03 周先波, 男, 33岁, 博士研究生

$$(T_0 a)(\omega)=|h(\omega/2)|^2 a(\omega/2)+|h(\omega/2+\pi)|^2 a(\omega/2+\pi)$$
$$(\tilde T_0 a)(\omega)=|\tilde h(\omega/2)|^2 a(\omega/2)+|\tilde h(\omega/2+\pi)|^2 a(\omega/2+\pi)$$

以下考虑的是双正交情形,故高通滤波可用低通滤波来表示,即

引理 2[1] 滤波集 $\{h,\tilde h,g,\tilde g\}$双正交⇔

$$\tilde g(\omega)=e^{-i\omega}\overline{h(\omega+\pi)}k(2\omega),\text{且 } g(\omega)=e^{-i\omega}\overline{\tilde h(\omega+\pi)k^{-1}(2\omega)}$$

其中,$k(\omega)\neq 0$属于 Wiener类 (即其系数列属于 l^1).

提升格式给出尺度函数 (或低通滤波) 相同的多尺度分析之间的关系[1,2],现给定一初始双正交滤波集 $\{h^0(\omega),\tilde h^0(\omega),g^0(\omega),\tilde g^0(\omega)\}$和相应的双正交函数集 $\{\varphi^0,\tilde\varphi^0,\psi^0,\tilde\psi^0\}$ (这里假定引理 1的条件被满足),本文将提升格式概括为引理 3 (详见文 [1]).

引理 3 (提升格式) 由下列公式

$$\begin{cases} h(\omega)=h^0(\omega)\\ \tilde h(\omega)=\tilde h^0(\omega)+\tilde g^0(\omega)\overline{s(2\omega)}\\ g(\omega)=g^0(\omega)-h^0(\omega)s(2\omega)\\ \tilde g(\omega)=\tilde g^0(\omega)\end{cases}\tag{3}$$

以及

$$\begin{cases} \varphi(x)=\varphi^0(x)\\ \psi(x)=\psi^0(x)-\sum_k s_k\varphi^0(x-k)\\ \tilde\varphi(x)=2\sum_k \tilde h_k^0\tilde\psi(2x-k)+\sum_k s_{-k}\tilde\psi(x-k)\\ \tilde\psi(x)=2\sum_k \tilde g_k^0\tilde\varphi(2x-k)\end{cases}\tag{4}$$

分别得到 1组新的双正交滤波集 $\{h,\tilde h,g,\tilde g\}$及 1组新的双正交函数集 $\{\varphi,\tilde\varphi,\psi,\tilde\psi\}$,其中,$s(\omega)=\sum_k s_k e^{-ik\omega}$是任一三角多项式.

2 提升格式与小波对称性

首先分别给出滤波对称性与小波函数对称性、尺度函数对称性之间的相互关系.

定理 1 设滤波 $h(\omega)=\sum_{k=N_1}^{N_2} h_k e^{-ik\omega}$满足引理 1条件,$\varphi(x)$是由滤波 $h(\omega)$而定的尺度函数(见(1)式),则滤波 $h(\omega)$对称的充要条件是 $\varphi(x)$关于轴 $x=(N_1+N_2)/2$对称.

证明 由文 [5] 的引理 6.6.2知,$\varphi(x)$具有紧支集 $[N_1,N_2]$,又 $h(\omega)$对称⇔ $\exp\left\{\frac{i(N_1+N_2)w}{2}\right\}h(\omega)$是偶函数,应用公式 (1),有

$$\hat\varphi(\omega)e^{i\frac{N_1+N_2}{2}\omega}=\left[\prod_{j=1}^{\infty}h(2^{-j}\omega)\right]e^{i\frac{N_1+N_2}{2}\omega}=\prod_{j=1}^{\infty}h(2^{-j}\omega)e^{i\frac{N_1+N_2}{2}2^{-j}\omega}=$$
$$\prod_{j=1}^{\infty}h(-2^{-j}\omega)e^{-i\frac{N_1+N_2}{2}2^{-j}\omega}=\left[\prod_{j=1}^{\infty}h(-2^{-j}\omega)\right]e^{-i\frac{N_1+N_2}{2}\omega}=\hat\varphi(-\omega)e^{-i\frac{N_1+N_2}{2}\omega}$$

从而,$h(\omega)$关于 $x=(N_1+N_2)/2$对称.

定理 2 设滤波 $h(\omega)=\sum_{n=N_1}^{N_2}h_n e^{-in\omega}$对称,$g(\omega)=\sum_{n=M_1}^{M_2}g_n e^{-in\omega}$ (反) 对称,而且引理 1的条件被满足,则由它们确定的小波函数 $\psi(x)$关于 $x=(N_1+N_2+M_1+M_2)/4$(反)对称.

证明 由 $h(k)$，$g(k)$均为对称的，知 $g_{M_2-n}=g_{M_1+n}$，$0\leq n\leq M_2-M_1$，且由定理 1，$h(x)$关于 $(N_1+N_2)/2$对称，从而

$$j(x)=2\sum_{n=M_1}^{M_2}g_n h(2x-n)=2\sum_{n=0}^{M_2-M_1}g_{n+M_1}h(2x-n-M_1)=$$

$$2\sum_{n=0}^{M_2-M_1}g_{M_2-n}h(2x-n-M_1)=2\sum_{n=M_1}^{M_2}g_n h(2x+n-M_2-M_1)=$$

$$2\sum_{n=M_1}^{M_2}g_n h(N_1+N_2-2x-n+M_1+M_2)=$$

$$2\sum_{n=M_1}^{M_2}g_n h\left[2\left(-x+\frac{N_1+N_2+M_1+M_2}{2}\right)-n\right]=j\left(-x+\frac{N_1+N_2+M_1+M_2}{2}\right)$$

故 $j(x)$关于 $(N_1+N_2+M_1+M_2)/4$是对称的．同理可证，当 $h(k)$对称，$g(k)$反对称时，小波函数关于 $(N_1+N_2+M_1+M_2)/4$是反对称的．证毕．

同样，若已知低通滤波是反对称的，则当高通滤波是对称（或反对称）时，小波函数关于上面同样的对称轴是反对称（或对称）的．下面证明提升格式保持滤波对称性的定理．由此，并结合定理 1和定理 2及函数集的提升格式（4），不难推出相应的小波函数和对偶小波函数的对称性．

定理 3 给定一组初始的双正交对称滤波集 h^0，g^0，$\tilde{h}^0$，$\tilde{g}^0$，

其中，$h^0(k)=\sum_{k=N_1}^{N_2}h_k^0 e^{-ikk}$，$g^0(k)=\sum_{k=M_1}^{M_2}g_k^0 e^{-ikk}$，$\tilde{h}^0(k)=\sum_{k=\tilde{N}_1}^{\tilde{N}_2}\tilde{h}_k^0 e^{-ikk}$，$\tilde{g}^0(k)=\sum_{k=\tilde{M}_1}^{\tilde{M}_2}\tilde{g}_k^0 e^{-ikk}$

则提升后新的滤波保持原来的相应对称性当且仅当

$$s(2k)\exp\left\{-\frac{1}{2}(N_1+N_2-M_1-M_2)k\right\},\ s(2k)\exp\left\{-\frac{1}{2}i(\tilde{N}_1+\tilde{N}_2-\tilde{M}_1+\tilde{M}_2)k\right\}\qquad(5)$$

均为 k的偶函数．

证明 利用事实 $h(k)$对称 $\Leftrightarrow h(k)\exp\left(\frac{N_1+N_2}{2}ik\right)$为偶函数，$g(k)$对称 $\Leftrightarrow$ $g(k)\exp\left(\frac{M_1+M_2}{2}ik\right)$ $g(k)$为偶函数．并在提升公式(3)的第 2式和第 3式两边分别乘以 $\exp\left(i\frac{\tilde{N}_1+\tilde{N}_2}{2}k\right)$ 及 $\exp\left(i\frac{\tilde{M}_1+\tilde{M}_2}{2}k\right)$ 可得

$$\tilde{h}(k)\exp\left(i\frac{\tilde{N}_1+\tilde{N}_2}{2}k\right)=\tilde{h}^0(k)\exp\left(i\frac{\tilde{N}_1+\tilde{N}_2}{2}k\right)+\tilde{g}^0(k)\exp\left(i\frac{\tilde{M}_1+\tilde{M}_2}{2}k\right)\cdot\exp\left(i\frac{\tilde{N}_1+\tilde{N}_2-\tilde{M}_1-\tilde{M}_2}{2}k\right)\cdot\overline{s(2k)}$$

以及

$$g(k)\exp\left(i\frac{M_1+M_2}{2}k\right)=g^0(k)\exp\left(i\frac{M_1+M_2}{2}k\right)-h^0(k)\exp\left(i\frac{N_1+N_2}{2}k\right)\cdot\exp\left(i\frac{M_1+M_2-N_1+N_2}{2}k\right)\cdot s(2k)$$

可见，$\tilde{h}(k)$，$g(k)$对称当且仅当(5)中 2个函数均为偶函数．

同样可以证明其它情形，如以下定理 4．

定理 4 当给定滤波 h^0，$\tilde{h}^0$对称，而 g^0，$\tilde{g}^0$反对称时，则提升后的滤波保持原来的对称性(或反对称性)当且仅当(5)式给出的 2个函数均为奇函数．

由此，若需要确定提升后的滤波的对称性，只要根据滤波原来的对称性，考察提升系

数 $s(\xi)$即可.

3 双正交对偶 Riesz基

先考虑引理 1中引入的滤波 $h(\xi)$ (对 $\tilde{h}(\xi)$同样定义) 的转移算子 T_0

$$T_0 f(\xi)=\left|h\left(\frac{\xi}{2}\right)\right|^2 f\left(\frac{\xi}{2}\right)+\left|h\left(\frac{\xi}{2}+\pi\right)\right|^2 f\left(\frac{\xi}{2}+\pi\right)$$

其中, $f(\xi)$为任一三角多项式. 记$(2N+1)$维空间

$$E_N:=\left\{\sum_{k=-N}^{N} h_k e^{-ik\xi};\ (h_{-N},\cdots,h_N)\in \mathbf{C}^{2N+1}\right\}$$

和它的子空间 $$F_N:=\left\{\sum_{k=-N}^{N} h_k e^{-ik\xi};\sum_{k=-N}^{N} h_k=0\right\}$$

则有下列判别准则.

引理 4[3] 对偶滤波$\{h(\xi),\tilde{h}(\xi)\}$生成对偶的双正交紧支小波 Riesz基当且仅当它们相应的转移算子满足$|d(T_0)|<1;|d(\tilde{T}_0)|<1$. 这里 $d(T_0)$和$(d(\tilde{T}_0))$是 $T_0(\tilde{T}_0)$分别限制于 F_N和$(\tilde{F}_N)$的谱半经.

现考虑滤波 $h^0(\xi)=\left[\exp(-3i\xi)+3\exp(-2i\xi)+3\exp(-i\xi)+1\right]/8=\left[(1+\exp(-i\xi))/2\right]^3$

该滤波对应的尺度函数是 3阶 B样条[3], 由双正交条件 (2), 易得其对偶滤波为

$$\tilde{h}^0(\xi)=\left[-\exp(-3i\xi)+3\exp(-2i\xi)+3\exp(-i\xi)-1\right]/4$$

文 [3] 指出, 对偶尺度函数不属于 $L^2(R)$. 下面本文对它们构成的双正交滤波集

$$\left\{h^0(\xi),\tilde{h}^0(\xi),g^0(\xi),\tilde{g}^0(\xi)\right\} \tag{6}$$

进行提升, 其中

$$g^0(\xi)=\left[-e^{-i\xi}-3+3e^{i\xi}+e^{2i\xi}\right]/4,\ \tilde{g}^0(\xi)=\left[e^{-i\xi}-3+3e^{i\xi}-e^{2i\xi}\right]/8$$

使得到的新的满足一定条件的双正交滤波集生成 $L^2(R)$的双正交紧支小波 Riesz基.

定理 5 假定对上面得到的滤波集 (6) 进行提升, 则当提升系数满足 $s(\xi)=3(e^{2i\xi}-1)/8$时, 提升后的滤波生成 $L^2(R)$的紧支的双正交对偶小波 Riesz基, 而且小波函数具有 1阶消失距, 对偶小波函数具有 2阶消失矩, 且关于 $x=1/2$对称.

证明 分以下 2步来证明.

(1) 对滤波集(6)进行提升: 由滤波提升公式(3)和定理 4, 提升后的滤波 $h(\xi)$和 $\tilde{g}(\xi)$未变, $\tilde{h}(\xi)$, $g(\xi)$要分别保持原来的对称和反对称性当且仅当 $d(\xi):=s(\xi)e^{-i\xi}$是奇函数(此时, $N_1+N_2=3, M_1+M_2=-1$). 又提升后的小波函数的消失矩由原来的 0增至 1当且仅当 $g(0)=g'(0)=0$, 而由公式 (3), 这又等价于提升系数满足 $s(0)=0$, $s'(0)=\frac{3}{4}i$. 容易验证, 当 $s(\xi)=3(e^{2i\xi}-1)/8$时, 这 2条均被满足. 因为提升只增加小波的消失矩, 而对偶小波的消失距不变, 故此时小波具 1阶消失矩, 对偶小波具 2阶消失距. 由定理 2, 它们都关于 $x=1/2$对称. 通过运算, 可得提升后的滤波集为

$$\begin{cases} h(\xi)=h^0(\xi),\tilde{g}(\xi)=\tilde{g}^0(\xi) \\ \tilde{h}(\xi)=\frac{3}{64}e^{2i\xi}-\frac{9}{64}e^{i\xi}-\frac{7}{64}+\frac{45}{64}e^{-i\xi}+\frac{45}{64}e^{-2i\xi}-\frac{7}{64}e^{-3i\xi}-\frac{9}{64}e^{-4i\xi}+\frac{3}{64}e^{-5i\xi} \\ g(\xi)=\frac{3}{64}e^{4i\xi}-\frac{9}{64}e^{3i\xi}+\frac{7}{64}e^{2i\xi}+\frac{45}{64}e^{i\xi}-\frac{45}{64}-\frac{7}{64}e^{-i\xi}+\frac{9}{64}e^{-2i\xi}+\frac{3}{64}e^{-3i\xi} \end{cases} \tag{7}$$

(2) 证明双正交滤波集 (7) 生成 $L^2(R)$的对偶小波 Riesz基: 往证滤波 $h(k)$, $\tilde{h}(k)$满足引理 4的条件. 前者易证, 因为可求出其特征值分别为 1, 1/2, 1/4, 1/8, 1/16, 1/32, 1/32. 下验证后者. 通过运算, 可求出 $\tilde{h}(k)$对应的转移算子 $\tilde{T}_0$ 限制于 E_N 的矩阵 (15×15阵) $\tilde{M}_0$ 的特征值分别为 $\lambda_i = a_i/2\,048$, 而 $a_i\ (i=1,2,\cdots,15)$分别是

$a_1 = 2\,048$, $a_2 \cong 398.984$, $a_3 \cong -1\,251.611$, $a_4 \cong -81.373$, $a_5 \cong -915.959$,
$a_6 \cong -78.396$, $a_7 \cong 357.819$, $a_8 \cong 1\,606.553$, $a_9 = 64$, $a_{10} = 128$,
$a_{11} = 256$, $a_{12} = 512$, $a_{13} = 1\,024$, $a_{14} = 9$, $a_{15} = 9$.

可见, 1是非退化特征值, 再注意到向量 $\mu = (1,1,\cdots,1)$满足 $\mu\tilde{T}_0 = \mu$ (事实上, 将 $\tilde{T}_0 f(k)$用滤波系数表出, 利用 $\tilde{h}(0)=1$及 $\tilde{h}(\pi)=0$, 可得之), 故 1不属于 $\tilde{T}_0$限制于 $\tilde{F}_N$ 的谱; 又其余特征值都属于单位圆盘内, 故引理 4的条件被满足, 从而定理获证.

参 考 文 献

1 Sweldens W. The lifting scheme: a custom-design construction of biorthogonal wavelets. Journal of Appl & Comput Harmonic Analysis, 1996, 3 (2): 186~200

2 Schröder P, Sweldens W. Spherical wavelets: efficiently representing functions on the sphere, Computer Graphics Proceedings (SIGGRAPH), 1995, 95. 161~172

3 Cohen A, Daubechies I. A stability criterion for biorthogonal wavelet bases and their related sub-band coding schemes. Duke Math J, 1993, 68: 1340~1350

4 Cohen A, Daubechies I, Feauveau J. Biorthogonal bases of compactly supported wavelets. Comm Pure Appl Math, 1992, 45: 485~560

5 Daubechies I. Ten lectures on wavelets. In: CBMS-NSF regional conf series in appl math. Vermont: Capital City Press, 1992. 1

The Lifting Scheme and Biorthogonal Wavelet Riesz Bases

Zhou Xianbo *

Abstract A theorem about the lifted biorthogonal filters preserving the symmetry on the basis of the lifting scheme is proved. By means of the lifting scheme, a set of new filters which exactly generate biorthogonal Riesz bases of compactly supported wavelets for $L^2(R)$ is obtained from a set of initial filters which don't generate dual Riesz bases.

Keywords lifting scheme, symmetry, biorthogonal filters, wavelet Riesz bases

* Department of Mathematics, Zhongshan University, Guangzhou 510275, China