第 37卷　第 2期
1998年　3月

中山大学学报 (自然科学版)
ACTA　SCIENTIARUM　NATURALIUM
UNIVERSITATIS　SUNYATSENI

Vol. 37　No. 2
Mar.　1998

小熵猜测的一个简单证明*

罗　俊

(中山大学科学计算与计算机应用系，广州 510275)

摘　要　设 f 为闭区间上连续映射. 若没有非 2方幂的周期点, 则 f 限制到每一非周期回复点的 ω-极限集上拓扑半共轭于加法机器, 从而其拓扑熵为 0并且每个回复点都是几乎周期点. 于是, 闭区间上连续映射 f有 0拓扑熵当且仅当下述 4个条件之一成立: ① f 没有非 2方幂的周期点; ② $A(f)=W(f)$; ③ $W(f)=QW(f)$; ④ $QW(f)=R(f)$.

关键词　拓扑熵, 加法机器, 几乎周期点

分类号　O 189.1

自 Bowen-Franks[1] 1976年证明了著名 Bowen-Franks定理: 设 f 为闭区间 I 上连续映射, 若 f 有周期点的周期为 $n=2^d m$ (其中 $m>1$为奇数), 则 f 的拓扑熵大于 $\ln(2/n)$. Block[2]于 1978年首次猜测该定理的逆定理也成立, 也就是说, 闭区间 I 上的连续自映射 f 拓扑熵为 0的充要条件是 f 每个周期点的周期都是 2的方幂. 这就是所谓的小熵猜测. Misiurewicz[3]于 1979年宣称已肯定地回答上述问题, 而周作领[4]于 1985年给出了拓扑意义很浓的又一证明. 本文则试图通过下面的引理 1来给出小熵猜测的更为初等的证明, 并通过利用文 [5, 6] 的若干概念与结论, 得到闭区间上连续映射拓扑熵为 0的几个充要条件.

设 (X,d)是紧致度量空间, f 是 X 上的连续映射, X 中每点 x 在 f 作用下生成轨道 $\mathrm{Orb}(x,f)=\{f^n(x): n\geq 0\}$. $\mathrm{Orb}(x,f)$的极限点集合叫作 x 的 ω-极限集, 记作 $\omega(x,f)$. x 叫作 f 的几乎周期点, 若对任意 $\varepsilon>0$, 存在正整数 N, 使得对任意正整数 n 都有

$$\mathrm{Card}(\{r: d(x,f^r(x))<\varepsilon, n\leq r<n+N\})\geq 1$$

x 叫作 f 的弱几乎周期点, 若对任意 $\varepsilon>0$, 存在正整数 N, 使得对任意正整数 n, 有

$$\mathrm{Card}(\{r: d(x,f^r(x))<\varepsilon, 0\leq r<nN\})\geq n$$

x 叫作 f 的拟弱几乎周期点, 若对任意 $\varepsilon>0$, 存在正整数 N 与严格递增的正整数列 $\{n_j\}$, 使得

$$\mathrm{Card}(\{r: d(x,f^r(x))<\varepsilon, 0\leq r<n_jN\})\geq n_j$$

x 叫作 f 的回复点, 若 $x\in\omega(x,f)$. 分别记 $F(f)$, $P(f)$, $A(f)$, $W(f)$, $QW(f)$, $R(f)$ 为 f 的不动点集, 周期点集, 几乎周期点集, 弱几乎周期点集, 拟弱几乎周期点集和回复点集. 易见 $F(f)\subset P(f)\subset A(f)\subset W(f)\subset QW(f)\subset R(f)$.

* 国家教委博士点基金 (9555810) 和广东省自然科学基金资助项目
收稿日期: 1997-06-25　罗　俊, 男, 26岁, 博士研究生

引理 1[7] 设 f 为紧致度量空间 X 上的连续映射，(E,W)为加法机器，若存在连续满射 $Q: X \to E$ 使得 $O \circ f = W \circ Q$，并且集合 $Q = \{T \in E: \mathrm{Card}(O^{-1}(T)) > 1\}$为可数集，则 f 的拓扑熵为 0且 (X, f)有唯一的极小集.

这里 E为 2个符号的符号空间，映射 $W: E \to E$ 定义如下：任意 $T \in E$，若 T的第 i个(i为非负整数)坐标是第 1个等于 0的坐标，则 $W(T)$第 i 个之前的坐标均为 0，第 i个坐标为 1，第 i 个以后的坐标与 T一致．易见，对每个 $T \in E$ 都有 $k(T,W) = E$ 且 W的拓扑熵为 0. (E,W)就称作加法机器.

1 小熵猜测的证明

设 f 为闭区间 I 上连续映射，f 每个周期点的周期都是 2的方幂，$\forall x \in R(f) - P(f)$，记 $\mathrm{Orb}(x, f) = \{f^n(x): n \geq 0\}$为其轨道，则有以下的 5个命题.

命题 1 设 Q 为 I 中关于 $k(x, f)$不可约的闭子区间，$F = F(f) \cap Q$，则 $Q - F$ 恰好有 2个分支与 $\mathrm{Orb}(x, f)$相交.

证明 由于非空闭集 F 与 $\mathrm{Orb}(x, f)$不相交，可选 Q中 2个点 $f^i(x)$与 $f^j(x)$，使得 $f^{i+1}(x) > f^i(x)$且 $f^{j+1}(x) < f^j(x)$，则 $f^i(x)$与 $f^j(x)$分别在 $Q - F$ 的不同分支，故 $Q - F$ 至少有 2个分支与 $\mathrm{Orb}(x, f)$相交.

若 $Q - F$ 有多于 2个分支与 $\mathrm{Orb}(x, f)$相交，可选取分支 $C = (a, b)$使得 $\mathrm{Orb}(x)$有小于 a 和大于 b 的点，选取 $f^i(x) \in C$，使得 $f^{i+1}(x)$不在 C 中，不妨设 $f^{i+1}(x) < a$，($f^{i+1}(x) > b$ 情形类似)，由回复性可选取 $j > 1$使得 $f^{i+j} > b$. 利用中值定理可知，存在 $(f^i(x), b)$中 a_1 以及 (a_1, b)中 2点 $y < a_2$，使得 $f(a_1) = a$，$f(y) = f^i(x)$且 $f(a_2) = a_1$，则或者 $[f^i(x), a_1]$中或者 $[y, a_2]$中有非 2方幂周期点.

命题 2 设 Q_0 与 Q_1 为 $Q - F$ 的 2个分支与 $\mathrm{Orb}(x, f)$相交，则 $f(Q_i \cap \mathrm{Orb}(x, f)) \subset Q_{1-i}$，其中，$i = 0, 1$，于是，若 $x \in Q_i$，则 $\mathrm{Orb}(x, f^2) \subset Q_i$ 且 $\mathrm{Orb}(f(x), f^2) \subset Q_{1-i}$.

证明 不妨假定按数轴上位置 Q_0 在 Q_1 左边．若存在 $f^i(x) \in Q_1$，使得 $f^{i+1} \in Q_1$，则可令 $j \geq i$ 满足 $f^j(x)$，$f^{j+1}(x) \in Q_1$ 且 $f^{j+2}(x) \in Q_0$，并可设存在正整数 q，使得 $f^{q+j}(x) > \max\{f^j(x), f^{j+1}(x)\}$．由中值定理，$f^j(x)$与 $f^{j+1}(x)$之间必有某一点 y，使得 $f(y) = w$，其中，w 是 Q_1 的左端点．如此则 $f^j(x)$与 $f^{j+1}(x)$之间必有非 2方幂的周期点．故 $f(Q_1 \cap \mathrm{Orb}(x, f)) \subset Q_0$，当 $i = 0$时类似.

命题 3 设 X_0 与 X_1 分别是关于 $k(x, f^2)$与 $k(f(x), f^2)$的不可约闭子区间，则 X_0 与 X_1 不相交.

证明 设 $i \in \{0, 1\}$使得 $X_0 \subset \mathrm{Cl}(Q_i)$，则 $X_1 \subset \mathrm{Cl}(Q_{1-i})$．若 t 为 X_0 和 X_1 的公共点，则 t 必为 f 的不动点．考虑 $f^2: X_0 \to I$，由连续性易见 $\mathrm{Cl}(Q_i) - F(f^2)$必有某分支 C 含有一点 $f^i(x)$，满足 $f^{i+1}(x) \in C$，与命题 2结论矛盾.

命题 4 存在连续满射 $Q: k(x, f) \to E$，使得 $O \circ f = W \circ Q$，并且集合 $\{T \in E: \mathrm{Card}(O^{-1}(T)) > 1\}$是可数的.

证明 对任意有限(0,1)-序列 $i_0 i_1 \cdots i_n$，令 $e(i_0 i_1 \cdots i_n) = i_0 + E_{j=1}^{n} i_j 2^{j+j-1}$，记 $X_{i_0 i_1 \cdots i_n}$为 I 中关于 $k(f^{e(i_0 i_1 \cdots i_n)}(x), f^{2^{n+1}})$的不可约闭子区间，则 $\{X_{i_0 i_1 \cdots i_n}: i_j \in \{0, 1\}, 0 \leq j \leq n\}$两两不交．对任意 $T = (i_0 i_1 \cdots) \in E$，令 $X_T = \bigcap_{n \geq 0} X_{i_0 i_1 \cdots i_n}$，则 $k(x, f) \subset \bigcup_{T \in E} X_T$ 且 $\{X_T: T \in E\}$两两不交.

对任意 $y \in \mathrm{k}(x,f)$，存在唯一的 X_T 含有 y，定义 $O(y) = T$. 易见 $O \circ f = W \circ O$ 且集合 $\{T \in E: \mathrm{Card}(O^{-1}(T)) > 1\}$ 为可数集.

命题 5　对于 f 的任意非周期回复点 x，$f|_{\mathrm{k}(x,f)}$ 的拓扑熵为 0.

证明　由引理 1与命题 4可知.

引理 2[5]　设 g 为闭区间上的连续自映射，则 $h(g) = \sup\{h(g|_{\mathrm{k}(x,g)}): x \in W(g)\}$.

定理 1　闭区间上连续映射 g 拓扑熵为 0当且仅当 g 没有非 2方幂的周期点.

证明　由引理 2可见，$h(g) = \sup\{h(g|_{\mathrm{k}(x,g)}): x \in R(g)\}$. 若 g 没有非 2方幂的周期点，则由引理 5可见 g 的拓扑熵 $h(g) = 0$. 若 g 的拓扑熵为 0，则由 Bowen-Franks定理，g 没有非 2方幂的周期点.

2　拓扑熵为零的条件

引理 3[6]　设 (X,f) 与 (Y,g) 为紧致系统，若存在连续满射 $h: X \to Y$，且 $h \circ f = g \circ h$，则 $h(R(f)) = R(g)$，$h(A(f)) = A(g)$，$h(W(f)) = W(g)$，$h(QW(f)) = QW(g)$.

引理 4　设 $f: I \to I$ 为连续映射，且 f 有非 2方幂周期点，则 $W(f) - A(f)$，$QW(f) - W(f)$，$R(f) - QW(f)$ 都非空.

证明　由文 [2]知，存在正整数 m 与 I 中的 f^m 不变闭子集 X，使得 $f^m|_X$ 拓扑半共扼于 2个符号的单边符号空间 E_2 上的转移自映射 e. 而 $W(\mathrm{e}) - A(\mathrm{e})$，$QW(\mathrm{e}) - W(\mathrm{e})$，$R(\mathrm{e}) - QW(\mathrm{e})$ 都是非空集合.

引理 5[8]　设 (X,f) 为紧致系统且 x 为任一回复点，则 x 为几乎周期点当且仅当 $\mathrm{k}(x,f)$ 是极小集.

引理 6　设 f 为闭区间上的连续自映射，若 f 无非 2方幂周期点且 x 为 f 的非周期回复点，则 x 是几乎周期点.

证明　由命题 4知，x 的 k-极限集 $\mathrm{k}(x,f)$ 拓扑半共扼于加法机器，令 $O: \mathrm{k}(x,f) \to E$ 为连续满映射使得 $O \circ f = W \circ O$ 且集合 $\{T \in E: \mathrm{Card}(O^{-1}(T)) > 1\}$ 为可数集，则对任意一点 $y \in \mathrm{k}(x,f)$ 都有 $O(\mathrm{Cl}(\mathrm{Orb}(x,f))) = E$，于是 $\mathrm{k}(x,f)$ 为极小集，即 x 为 f 的几乎周期点.

定理 2　设 f 为闭区间上连续映射，则 f 的拓扑熵为 0当且仅当以下 4个条件之一成立：① f 没有非 2方幂的周期点；② $A(f) = W(f)$；③ $W(f) = QW(f)$；④ $QW(f) = R(f)$.

证明　由定理 1，引理 4，引理 6可得.

参　考　文　献

1　Bowen R, Franks J. The periodic points of maps of the disk and the interval. Topology, 1976(15): 337～342

2　Block L. Homoclinic points of mappings of the interval. Proc Amer Math Soc, 1978, 72: 576～580

3　Misiurewicz M. Horseshoes for mappings of the interval. Bull Acad Polon Sci Ser Sci Math, 1979, 27(2): 167～169

4　周作领. 小熵猜测的证明. 中国科学 (A), 1985(10): 881～889

5　周作领. 弱几乎周期点与测度中心. 中国科学 (A), 1992(6): 572～581

6　周作领，何伟宏. 轨道结构的层次与拓扑半共轭. 中国科学 (A), 1995, 25(5): 457～464

7　Ye X D. The dynamics of homeomorphisms of hereditarily decomposable chainable continua. Top

Appl, 1994, 64 85~ 93
8 Gottschalk W H. Almost periodic points with respect to transformation semi-group. Ann Math, 1940, 47(4): 762~ 767

A Simple Proof of Small Conjecture on Topological Entropy

Luo Jun[*]

Abstract Let f be a continuous mapping of a closed interval. If f has no periodic orbit whose period is not a power of 2 then the restriction of f to the k-limit set of each non-periodic recurrent point is topologically semi-conjugate to the adding machine. This indicates that the topological entropy for f is zero and each recurrent point is almost periodic. Thus, a continuous mapping f on a closed interval has zero topological entropy if and only if one of the following four conditions is satisfied: ① f has no periodic orbit whose period is not a power of 2; ② $A(f)= W(f)$; ③ $W(f)= QW(f)$; ④ $QW(f)= R(f)$.

Keywords topological entropy, adding machine, almost periodic point

°简 讯°

全国科技期刊被引频次及影响因子分类排行

据中国科学院中国科学引文数据库 1996年数据编制的中国科技期刊分类被引频次及影响因子排行表，本刊被引频次位于综合类第 9名，影响因子位于第 5名. 该数据库把全国科技期刊划分为 10大类,《中国科技期刊研究》1997年第 4期公布了各类期刊前 10名的排行情况. 综合类科技期刊被引频次和影响因子前 10名排行如下.

名次	期刊名称	被引频次	名次	期刊名称	影响因子
1	科学通报	1 744	1	中国科学 (B)	0.585 3
2	中国科学 (B)	950	2	中国科学 (A)	0.313 6
3	中国科学 (A)	498	3	南京大学学报 (自)	0.203 8
4	Chin Sci Bull	261	4	北京师范大学学报 (自)	0.188 0
5	厦门大学学报 (自)	234	5	中山大学学报 (自)	0.184 2
6	南京大学学报 (自)	208	6	复旦学报 (自)	0.166 7
7	华中理工大学学报	196	7	武汉大学学报 (自)	0.165 4
8	Sci China A	179	8	清华大学学报 (自)	0.153 8
9	中山大学学报 (自)	170	9	自然科学进展	0.150 4
10	武汉大学学报 (自)	158	10	大连理工大学学报	0.147 4

(张 文)

[*] Department of Scientific Computing and Computer Application, Zhongshan University, Guangzhou 510275, China